المحور الثامن: نظرية سلوك المنتج (الانتاج في المدى الطويل)

الإنتاج في المدى الطويل (الإنتاج بعنصرين متغيرين):

في المدى الطويل نفترض أن كل عناصر الإنتاج تتغير، ومنه فان عاملي الإنتاج، رأس المال والعمل، يفترض أنها متغيران. هناك تشابه كبير بين تحليل التوازن في المدى الطويل بالنسبة للمنتج والبحث عن تعظيم المنفعة بالنسبة للمستهلك. هذا التشابه يتعلق بشكل عام بمفهوم الإحلال، ومفهوم التوازن، وان كان هذا الأخير لديه خصوصيات مقارنة بوضعية المستهلك.

- **دالة الإنتاج بعوامل قابلة للإحلال:** نعتبر دالة إنتاج، بمعنى علاقة بين كميات عناصر الإنتاج المستعملة ومستوى المخرجات المتحصل عليها لإنتاج سلعة ما، ونكتب دالة الإنتاج بالطريقة التالية :

$$Q = f(K, L)$$

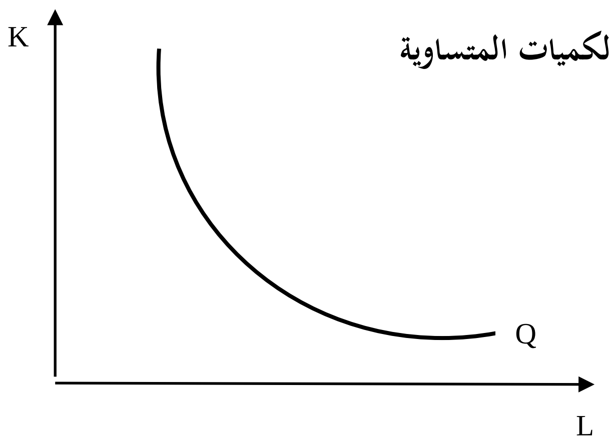
مع العلم أن الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج رأس المال والعمل تكون موجبة ومتناقصة، ومنه فنحن في المنطقة II للإنتاج. وهذا يفترض أن الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق بالنسبة لـ K و L .

1.2.1.مفهوم منحنى الكميات المتساوية وخصائصه:

- **تعريف:** منحنى الكميات المتساوية isoquant هو مجموع التركيبات من عناصر الإنتاج التي تسمح للمنتج بالحصول على نفس مستوى الإنتاج $Q = Q_0$.

بشكل عام التمثيل البياني لمنحنى الكميات المتساوية هو كالتالي:

البيان 2: منحنى الكميات المتساوية



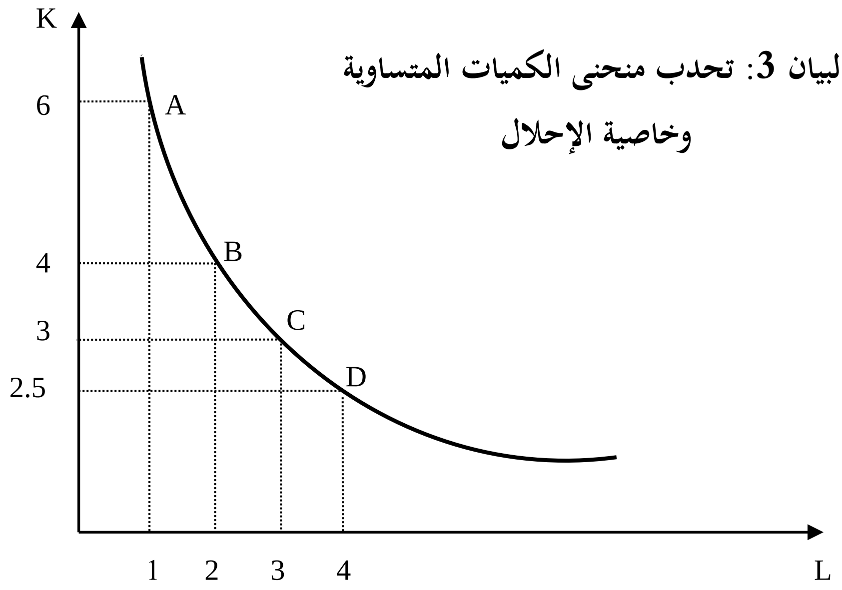
- **خصائص منحنيات الكميات المتساوية:**

- كل التركيبات من رأس المال والعمل الموجودة على نفس منحنى الكميات المتساوية تحقق للمنتج نفس مستوى الانتاج؛
- يستحيل أن يتقاطع منحنيي كميات متساوية؛
- منحنيات الكميات المتساوية لديها ميل سالب:

تفسير ذلك يعود إلى مفهوم الإحلال بين عنصري الإنتاج رأس المال والعمل، وذلك مع نفس مستوى الإنتاج. إذا قرر المنتج تخفيض كمية عنصر إنتاج ما (مع مستوى إنتاج ثابت)، إذن عليه أن يستخدم كميات إضافية من عنصر الإنتاج الآخر. هذا يقودنا إلى مفهوم التحدب؛

- منحنى الكميات المتساوية يكون محدب نحو نقطة الأصل، وهذا له علاقة بقانون المردوديات الحدية المتناقصة. حيث كلما أصبح عنصر إنتاج نادرا نسبيا، كلما تتطلب إحلال نفس الكمية من هذا العنصر كمية أكبر من عنصر الإنتاج الآخر.

البيان 3: تحدب منحنى الكميات المتساوية وخاصية الإحلال

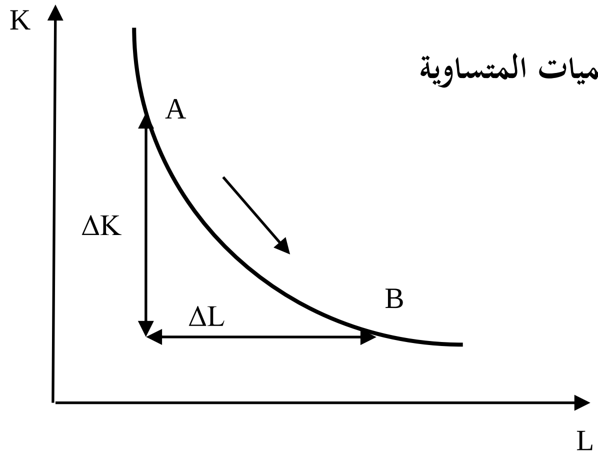


لإحلال K بـ L، على المنتج التخلي عن كميات أقل أكثر فأكثر من عنصر رأس المال الذي يصبح نادرا نسبيا، من أجل الحصول على وحدات إضافية من عنصر العمل. هنا، الإنتاجية الحدية (أو المردودية) لرأس المال ترتفع، على عكس تلك الخاصة بعنصر العمل التي تنخفض، وكل هذه العملية للإحلال تتحقق مع الحفاظ على مستوى الإنتاج ثابت.

على البيان، نلاحظ أن الانتقال من A إلى B يتطلب التخلي عن وحدتين من رأس المال للحصول على وحدة إضافية من العمل. التبادل يتحقق بـ 2K مقابل 1L أو 2 مقابل 1. للانتقال من B إلى C، التبادل يتحقق بـ 1K مقابل 1L أو 1 مقابل 1، ومن C إلى D التبادل يتحقق بـ 0.5K مقابل 1L أي 0,5 مقابل 1.

2.2.1. مفهوم المعدل الحدي للإحلال التقني (TMST) وخصائصه:

- **تعريف**: المعدل الحدي للإحلال التقني (TMST) يدل على عدد الوحدات من رأس المال التي يجب على المنتج التخلي عنها من أجل الحصول على وحدة إضافية من العمل، مع المحافظة على ثبات مستوى الإنتاج.



البيان 4: الانتقال على منحنى الكميات المتساوية و TMST

TMST يمثل إذا معدل تبادل عناصر الإنتاج وذلك بالمحافظة على نفس مستوى الإنتاج. ونكتب:

$$TMST = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$$

إذا كنا نتوقع تغيرات متناهية الصغر في كميات عناصر الإنتاج، نكتب إذن:

$$TMST = \lim_{\Delta L \to 0} -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{dK}{dL}$$

هنا، من الناحية البيانية، فان TMST يمثل ناقص ميل منحنى الكميات المتساوية.

ملاحظة: TMST يكون سالب ($0 > \Delta K$ و $0 < \Delta L$)، نضربه في الإشارة ($-$) حتى يصبح موجب.

- **خصائص المعدل الحدي للإحلال التقني TMST:**

- TMST يكون دائما موجب؛
- TMST متناقص على طول منحنى الكميات المتساوية، لأنه يمثل ميل منحنى الكميات المتساوية؛
- على طول منحنى الكميات المتساوية، TMST يساوي نسبة الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج.

على طول منحنى الكميات المتساوية Q ثابتة، أي $dQ=0$:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial L} dL + \frac{\partial Q}{\partial K} dK \rightarrow f'_L . dL + f'_L . dL = 0 \rightarrow Pm_L . dL + Pm_K . dK = 0$$

$$\rightarrow -\frac{dK}{dL} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = TMST$$

3.2.1.منحنى التكاليف المتساوية:

منحنى أو التكاليف المتساوية droite d’isocoût هو المنحنى الذي يجمع بين النقاط الممثلة لكميات عناصر الإنتاج K وL التي لديها نفس مستوى التكاليف الكلية.

باعتبار أن: w هو السعر الوحدوي للعمل أو أجر العامل، وr هو السعر الوحدوي لرأس المال أو تكلفة كراء رأس المال.

المنتج سوف يستعمل الكميات K وL من عناصر الإنتاج؛ حيث K وL مجهولة، التكلفة الكلية للإنتاج تساوي بالضرورة المبلغ المرجح بالأسعار (التي يفترض أنها معروفة) لهذين العنصرين w وr، ومنه $wL + rK$.

إذا كان المنتج يمتلك مبلغ إجمالي من الموارد، C وحدة نقدية، ومشكلته تتمثل في كيفية توزيع هذه الموارد لشراء عنصري الإنتاج، ومنه لدينا بالضرورة: $C = wL + rK$

أو: $K = -\frac{w}{r}L + \frac{C}{r}$

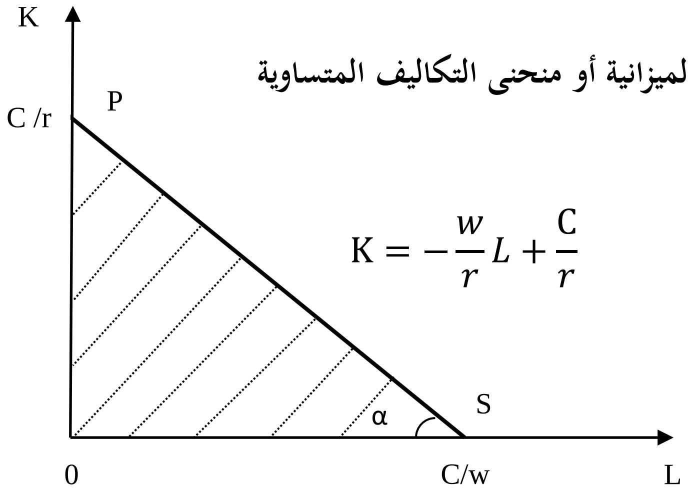
هذه معادلة خط مستقيم ميله سالب (لأن w وr > 0) ويساوي نسبة الأسعار w/r، أي: $\frac{dK}{dL} = -\frac{w}{r}$

نقاط تقاطع هذا الخط المستقيم مع المحورين الأفقي والعمودي يمكن تحديدها كالتالي:

$$L = 0 \rightarrow K = \frac{C}{r}$$
$$K = 0 \rightarrow L = \frac{C}{w}$$

هذا يعني أنه، بالنظر إلى الموارد C المتوفرة ومستوى الأسعار، الكمية القصوى من عنصر الإنتاج K التي يمكن أن يحصل عليها المنتج تساوي C/r، وهي تمثل نقطة تقاطع خط الميزانية مع المحور العمودي (النقطة P في البيان التالي)، حيث الكمية المستعملة من عنصر الإنتاج L تكون معدومة. وبنفس الطريقة، في نقطة تقاطع خط الميزانية مع المحور الأفقي (النقطة S) فان الكمية من عنصر الإنتاج K تكون معدومة ويستطيع المنتج شراء C/w وحدة من عنصر الإنتاج L.

البيان 5: خط الميزانية أو منحنى التكاليف المتساوية



كل النقاط على خط الميزانية متساوية من حيث التكلفة، ولكن الكميات مختلفة من عناصر الإنتاج K و L.
خط الميزانية أو خط التكاليف المتساوية يسمح بتحديد مجموعة التركيبات الممكنة من عناصر الإنتاج التي يمكن للمنتج الحصول عليها تحت قيد الميزانية المحدد سابقا؛ ومنه فان مجال اختيار المنتج محدد بالمثلث OPS.

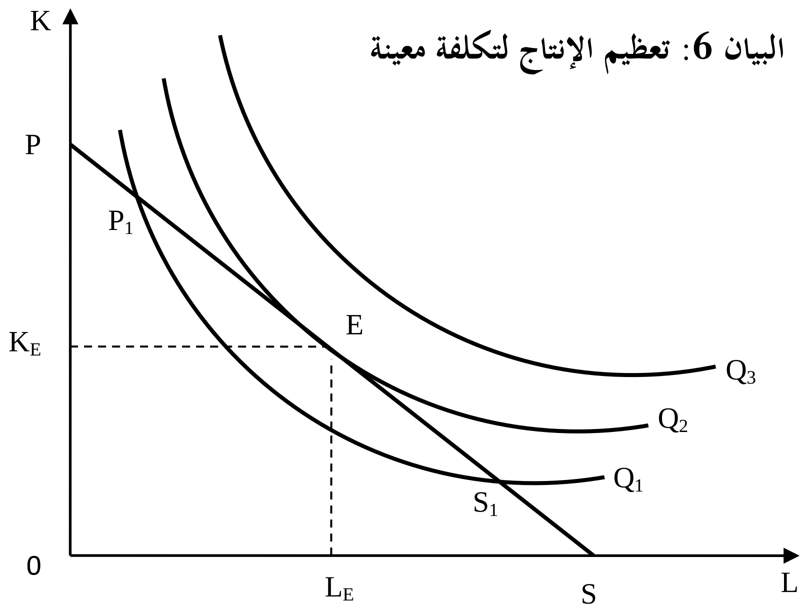
4.2.1.توازن المنتج:

على عكس المستهلك والذي توازنه محدد بوضعية واحدة والمتمثلة في تعظيم المنفعة تحت قيد. بالنسبة للمنتج هناك ثلاثة وضعيات توازن وتتمثل في: تعظيم الإنتاج لتكلفة معينة، تقليل التكلفة لإنتاج معين، وتعظيم الربح.

- **تعظيم الإنتاج لتكلفة معينة:**

نفترض هنا أن المؤسسة وهي تبيع منتوجها بسعر ثابت (وهي حالة أسواق المنافسة) تبحث عن أكبر إنتاج ممكن بتكلفة معينة أو بميزانية معينة. في هذه الحالة يريد المنتج الرفع من إنتاجه بالنظر إلى القيد (مستوى موارده وأسعار عناصر الإنتاج).

البيان 6: تعظيم الإنتاج لتكلفة معينة



- **التوازن بيانيا:**

إن مقابلة خط التكاليف المتساوية وخريطة منحنيات الكميات المتساوية تسمح بتعريف نقطة توازن المنتج المتمثلة في نقطة المماس بين منحنى التكاليف المتساوية ومنحنى الكميات المتساوية.

في البيان هناك في نفس الوقت منحنى التكاليف المتساوية المعرف سابقا وخريطة منحنيات الكميات المتساوية (3 منحنيات كميات متساوية فقط تم تمثيلها وهذا للتبسيط). مجال الاختيارات الممكنة ممثلة كما سبق وأن رأينا، بالمثلث OPS (بما في ذلك الحد PS). ننطلق على سبيل المثال من النقطة القصوى P، من الواضح أنه يمكن إنتاج الكمية Q_1 (في النقطة P_1 نقطة تقاطع الخط الميزاني PS مع منحنى الكميات المتساوية Q_1) ولكن يمكن إنتاج وبنفس التكلفة، مستوى إنتاج أعلى، Q_2، وأقصى إنتاج يمكن بلوغه يتحقق في نقطة واحدة وهي النقطة E، نقطة مماس بين منحنى الكميات المتساوية Q_2 والخط الميزاني PS.

E هي نقطة عظمى لأنه من جهة، منحنيات الكميات المتساوية الأبعد مثل Q_3 لا يمكن بلوغها (بالنظر إلى الميزانية والأسعار)، ومن جهة أخرى أي انتقال على الخط PS بعيدا عن النقطة E يؤدي إلى انخفاض مستوى الإنتاج ($Q_1 < Q_2$). هذه القيمة العظمى توجد بالضرورة لأنه وحسب الفرضية توجد مالا نهاية من منحنيات

الكميات المتساوية المتناقصة والمحدبة؛ خط الميزانية لديه ميل سالب، ومنه وبالضرورة فهو يمس إحدى منحنيات الكميات المتساوية في النقطة E.

إن وضعية النقطة E في البيان تسمح بتحديد مستوى الإنتاج الأعظم الذي يمكن للمقاول إنتاجه (هنا Q_2) وكذلك تركيبة عوامل الإنتاج المستخدمة (K_E , L_E). ومنه هناك تحديد في نفس الوقت لحجم الإنتاج ولتركيبة عوامل الإنتاج المستعملة.

من هذه الوضعية للتعظيم (أو للتوازن)، يمكن كذلك استخراج قاعدة التسيير التالية: في التوازن (في القيمة العظمى) نسبة الإنتاجيات الحدية تساوي نسبة أسعار عناصر الإنتاج.

نعلم مما سبق أن المعدل الحدي للإحلال التقني TMST المعرف بـ ناقص ميل منحنى الكميات المتساوية يساوي نسبة الإنتاجيات الحدية لعوامل الإنتاج: $TMST = -\frac{dK}{dL} = \frac{f'_L}{f'_K}$، أي في كل نقطة من منحنى الكميات المتساوية بما فيها النقطة E لدينا: $\frac{dK}{dL} = -\frac{f'_L}{f'_K}$. بينما النقطة E موجودة أيضا على خط الميزانية الذي ميله يساوي: $\frac{dK}{dL} = -\frac{w}{r}$ ، ومنه نستخرج العلاقة الرياضية التالية: $\frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r}$

من هذه العلاقة يمكن أن نستخرج القاعدة التالية: في التعظيم (النقطة العظمى)، تتساوى الإنتاجيات الحدية المقسومة على الأسعار، حيث من المساواة السابقة نجد: $\frac{f'_L}{w} = \frac{f'_K}{r}$

- **التوازن جبريا (استعمال مضاعف لاغرونج):**

يمكن الوصول إلى نفس النتائج باستعمال طريقة مضاعف لاغرونج multiplicateur de Lagrange.

انطلاقا من دالة الإنتاج $Q = f(K, L)$ والقيد الميزاني $C = wL + rK$ نكون المعادلة:

$$\pounds = f(K, L) + \lambda\,(C - wL - rK)$$

حيث أن λ هو مضاعف لاغرونج ، $\pounds$ هي دالة لـ K، L و λ .

لتعظيم $\pounds$ نحسب المشتقات الجزئية لـ $\pounds$ بالنسبة للمتغيرات الثلاثة ونساويها إلى الصفر.

$$\partial\pounds/\partial L = f'_L - \lambda w = 0 \;\rightarrow \frac{f'_L}{w} = \lambda \qquad (1)$$
$$\partial\pounds/\partial K = f'_K - \lambda r = 0 \rightarrow \frac{f'_K}{r} = \lambda \qquad (2)$$
$$\partial\pounds/\partial\lambda = C - wL - rK = 0 \qquad (3)$$

انطلاقا من المعادلتين الأولى والثانية، نجد النتائج السابقة:

$$\frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r} \quad و \quad \frac{f'_L}{w} = \frac{f'_K}{r} = \lambda$$

يبدو واضحا أن نسبة الإنتاجيات الحدية تساوي نسبة الأسعار في التوازن؛ أو لدينا تساوي الإنتاجيات الحدية مقسومة على الأسعار؛ كما أن معامل لاغرونج λ يساوي إلى نسبة الإنتاجيات الحدية مقسومة على الأسعار.

مضاعف أو معامل لاغرونج لديه أيضا تفسير اقتصادي الذي يمكن استخراجه من التحليل التالي:

- من دالة الإنتاج $Q = f(K, L)$، نستخرج عبارة التغير الكلي لهذه الدالة (التفاضل Q):

$$dQ = f'_L dL + f'_K\, dK$$

- من القيد الميزاني $C = wL + rK$ ، نستخرج التغير الكلي (تفاضل C): $dC = w\, dL + r\, dK$

في حين أنه في التوازن، برهنا أعلاه أن: $f'_L = \lambda w$ و $f'_K = \lambda r$

ومنه: $dQ = \lambda w\, dL + \lambda r\, dK = \lambda(wdL + rdK) = \lambda dC$

إذا كان: $dC = 1 \rightarrow dQ = \lambda$

مضاعف أو معامل لاغرونج (λ) يقيس إذا الزيادة في الإنتاج الناتجة عن وحدة إضافية من الميزانية.

- **تقليل التكلفة لإنتاج معين:**

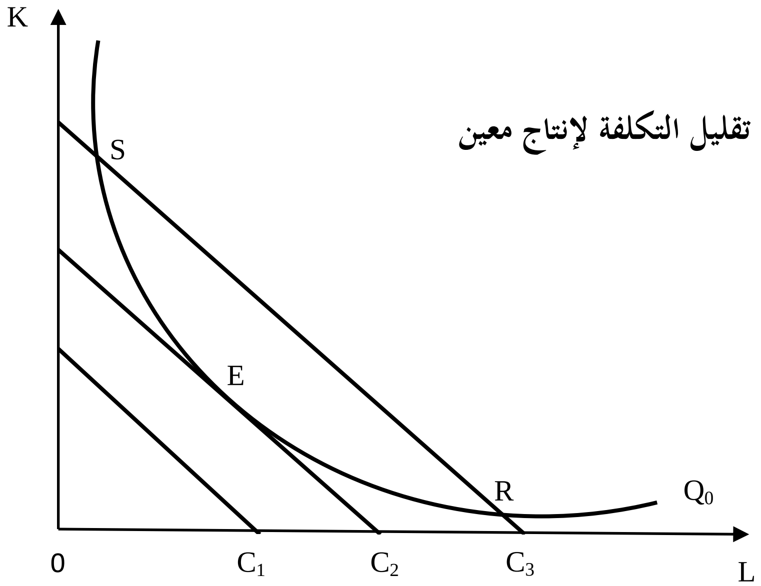
بدل من أن نفترض أن المنتج يبحث عن أكبر إنتاج لتكلفة ما أو نفقة محددة، سوف نفترض هنا أن المنتج يبحث عن تقليل التكلفة لمستوى إنتاج معين بالنظر إلى دفتر الطلبات، أو توقعات البيع.

المنتج يبحث افتراضا عن تقليل تكلفة الإنتاج: $C = wL + rK$ لمستوى الإنتاج المحدد $Q = Q_0$. دالة الإنتاج هي: $Q = f(K, L)$ وأسعار عناصر الانتاج w وr تكون معطاة؛ ومنه بالنسبة للمنتج فان الأمر يتعلق باختيار الكميات K وL التي تسمح له بإنتاج الكمية Q_0 بأقل تكلفة.

- **التوازن بيانيا:**

لقد مثلنا في البيان التالي منحنى الكميات المتساوية المرتبط بمستوى الإنتاج $Q = Q_0$، وخطوط التكاليف المتساوية الثلاثة: C_1 , C_2, C_3 التي لديها نفس الميل ولكن ترتبط بتكاليف إنتاج مختلفة: $C_3 > C_2 > C_1$. وبصفة عامة لدينا في الواقع بالنسبة لأي قيمة لـ C المعادلة: $K = -\frac{w}{r}L + \frac{C}{r}$

البيان 7: تقليل التكلفة لإنتاج معين



لقد تم تعديل التوازن بشكل بسيط يبين فرضية أن C هو المتغير وتم تمثيله بثلاث خطوط تكاليف متساوية فقط (وهذا للتبسيط)، في حين أنه توجد ما لا نهاية من خطوط التكاليف المتساوية.

مستوى التكاليف الممثل بالخط C_1 هو مقصى لأنه من غير الممكن في هذه الحالة إنتاج الكمية Q_0 اعتمادا على أي تركيبة من عوامل الإنتاج المتوفرة انطلاقا من هذه النفقة C_1. بالمقابل يمكن إنتاج الكمية Q_0 بتركيبات من عوامل الإنتاج مثل R وS، الذين يرتبطان بالتكلفة C_3 ولكن ننتقل من R أوS نحو E، حيث نرى أن المنتج يمكن له الحصول على نفس مستوى الإنتاج بتكلفة أقل.

نرى أن المنتج يكون في توازن في النقطة E حيث منحنى الكميات المتساوية يمس إحدى خطوط التكاليف المتساوية.

نبرهن أنه في التوازن (أقل تكلفة لمستوى إنتاج معين)، فان نسبة الإنتاجيات الحدية تتساوى مع نسبة أسعار عناصر الإنتاج، وسوف نصل إلى هذه النتيجة بطرق تحليلية:

النقطة E هي نقطة مماس بين منحنى الكميات المتساوية Q_0 ومنحنى التكاليف المتساوية C_2، حيث في هذه النقطة ميل منحنى الكميات المتساوية Q_0 $(\frac{dK}{dL})$ يساوي ميل منحنى التكاليف المتساوية C_2 $(-\frac{w}{r})$. ومنه فان:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{w}{r} \rightarrow -\frac{dK}{dL} = \frac{w}{r}$$

ومنه نستخرج العلاقة الرياضية للقاعدة المذكورة سابقا: $\frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r}$

من هذه القاعدة يمكن أن نستخرج العلاقة التالية: في التعظيم (النقطة العظمى)، تتساوى الإنتاجيات الحدية مقسومة على الأسعار. فمن المساواة السابقة لدينا: $\frac{f'_L}{w} = \frac{f'_K}{r}$

– **التوازن جبريا** (**استعمال مضاعف لاغرونج**):

المنتج يبحث عن تقليل تكلفة الإنتاج: $C = wL + rK$ من أجل مستوى انتاج معين، حيث $Q_0 = f(K,L)$ ، نبني معادلة لاغرونج: $V = wL + rK + \mu[Q_0 - f(K,L)]$

حيث μ هو مضاعف أو معامل لاغرونج، نشتق معادلة لاغرونج جزئيا بالنسبة للمتغيرات الثلاثة μ, K, L ونساويها إلى الصفر، حيث:

$$\partial V/\partial L = w - \mu f'_L = 0 \quad \rightarrow \frac{f'_L}{w} = \frac{1}{\mu} \qquad (1)$$

$$\partial V/\partial K = r - \mu f'_K = 0 \quad \rightarrow \frac{f'_K}{r} = \frac{1}{\mu} \qquad (2)$$

$$\partial V/\partial \mu = Q_0 - f(K,L) = 0 \qquad (3)$$

انطلاقا من المعادلتين الأولى والثانية، نجد:

$$\frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r} \quad \text{أو} \quad \frac{f'_L}{w} = \frac{f'_K}{r}$$

معنى مضاعف لاغرونج μ يمكن كذلك تحديده. حيث لدينا تغير أو تفاضل دالة الإنتاج: $Q = f(K,L)$ ثم تفاضل دالة التكلفة $C = wL + rK$ كالتالي:

- من دالة الإنتاج: $Q = f(K, L)$ ، نستخرج عبارة التغير الكلي لهذه الدالة (التفاضل Q):

$$dQ = f'_L dL + f'_K dK$$

- من دالة التكاليف: $C = wL + rK$، نستخرج التغير أو التفاضل الكلي للدالة C على الشكل:

$$dC = w\,dL + r\,dK$$

في حين أنه في التوازن، برهنا أعلاه أن: $w = \mu f'_L$ و $r = \mu f'_K$

ومنه: $dC = \mu f'_L\, dL + \mu f'_K\, dK = \mu(f'_L dL + f'_K dK) = \mu dQ$

إذا كان: $dQ = 1 \rightarrow dC = \mu$

مضاعف لاغرونج μ يقيس إذا التكلفة الحدية أو إضافي التكلفة الناتج عن إنتاج وحدة إضافية من المنتوج.

- **تعظيم الربح والاستعمال الأمثل لعوامل الإنتاج:**

إذا كان المنتج ينتج انطلاقا من كمية معينة من عناصر الإنتاج، تعظيم ربحه يمكن تحليله مباشرة. سعر المنتوج النهائي (P) وأسعار عناصر الإنتاج (w وr) تكون معطاة وهو ما يعني أننا في إطار منافسة، وهو ما سيتم التعمق فيه في الأجزاء القادمة.

ربح المنتج π هو الفرق بين الدخل الإجمالي أو الإيراد الإجمالي (إنتاج كمية مباعة Q بسعر البيع P) ومستوى التكاليف.

لدينا: $\pi = PQ - C$

و $Q = f(K, L)$ و $C = wL + rK$

ومنه: $\pi = Pf(K, L) - (wL + rK)$

الربح دالة لـ K وL يتم تعظيمه بالنسبة لهذين المتغيرين.

نضع المشتقات الجزئية بالنسبة لـ K وL تساوي الصفر، كشرط أساسي لتعظيم الربح، ومنه:

$$\partial\pi/\partial L = Pf'_L - w = 0 \quad \rightarrow w = Pf'_L$$
$$\partial\pi/\partial K = Pf'_K - r = 0 \quad \rightarrow r = Pf'_K$$

بينما f'_L و f'_K هي على التوالي الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج، وهي المشتقات الجزئية لدالة الإنتاج؛ Pf'_L و Pf'_K تمثل إذا الإنتاجيات الحدية بالقيمة النقدية لكل من عناصر الإنتاج.

هنا حتى يعظم المنتج ربحه، يجب أن تكون الإنتاجية الحدية بالقيمة النقدية لكل عنصر إنتاج تساوي سعره (سعر عنصر الإنتاج). يفهم من هذا أن من مصلحة المقاول الزيادة في استعمال عنصر إنتاج معين (L على سبيل المثال) مادام الإيراد الإضافي الناتج عن استعمال وحدة إضافية من هذا العنصر (وهو Pf'_L) أكبر من سعر هذا العنصر، بمعنى تكلفة استعمال وحدة إضافية من هذا العنصر (يمكننا أن نكتفي بالإشارة أن شروط الدرجة الثانية تتطلب أن تكون الإنتاجيات الحدية متناقصة $f''_L < 0$ و $f''_K < 0$).

يمكن أخيرا أن نلاحظ أن الشروط الضرورية لتعظيم الربح تمثل حالة خاصة من الشروط التي وجدناها سابقا لتعظيم الإنتاج تحت قيد تكلفة معينة أو تقليل التكلفة تحت قيد إنتاج معين، في الوقع لدينا مما سبق:

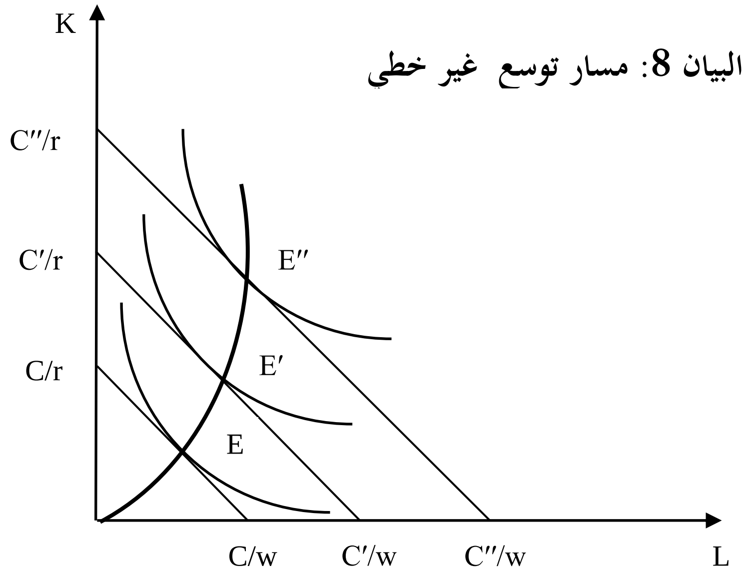
$$w = Pf'_L$$
$$r = Pf'_K$$
$$\rightarrow \frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r} \quad \text{أو} \quad \frac{f'_L}{w} = \frac{f'_K}{r}$$

5.2.1.مسار التوسع ومردوديات الحجم:

- **تعريف مسار التوسع**: مسار توسع المؤسسة أو المسار الأمثل للإنتاج sentier d'expansion هو المنحنى الذي يربط بين نقاط التوازن، عندما تتغير التكاليف مع بقاء أسعار عناصر الإنتاج ثابتة. وهو المنحنى الذي يرتفع على طوله مستوى الإنتاج.

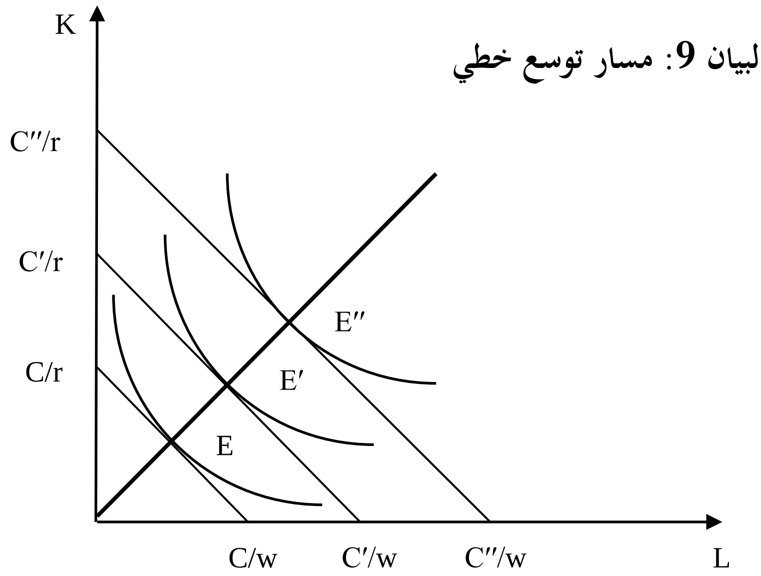
شكل منحنى مسار التوسع يتعلق بشكل دالة الإنتاج. يمكن توضيح ذلك في البيانين التاليين:

البيان 8: مسار توسع غير خطي



نقاط التوازن ليست على نفس المستوى، ومنه يكون مسار التطور على شكل منحنى.

البيان 9: مسار توسع خطي



عندما تكون دالة الإنتاج من النوع كوب دوغلاس Cobb-Douglas[1]، بمعنى من الشكل: $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$، فان مسار التوسع يكون على شكل خط مستقيم، وهو ما يعني أن نقاط التوازن المتتالية تكون على نفس المستوى. يمكن أن تكون هذه حالة الدوال المتجانسة، ولكن من الضروري ملاحظة أن بعض دوال الإنتاج الغير متجانسة يمكن أن تمثل كذلك مسار توسع خطي. ومنه ما معنى دالة إنتاج متجانسة؟

- **تعريف مردودية الحجم**: يقال عن دالة الإنتاج أنها متجانسة من الدرجة n، إذا ومن أجل t موجب، تضرب دالة الإنتاج في t^n عندما نضرب عناصر الإنتاج K و L في t، ومنه: $f(tK, tL) = t^n f(K, L)$

يمكن أن نميز 3 حالات:

- إذا كان $n > 1$: مردوديات عنصري الإنتاج متزايدة.

تعني إذا ضاعفنا على سبيل المثال قدرات الإنتاج من رأس مال وعمل، فان مستوى الإنتاج يزداد بأكثر من الضعف، ومنه أتت عبارة مردوديات السلم لعناصر الإنتاج المتزايدة Rendements d'échelle croissants.

- إذا كان $n < 1$: مردوديات السلم متناقصة.
- إذا كان $n = 1$: مردوديات السلم ثابتة.

6.2.1.مرونة الإحلال:

كل إنتاج يتعلق بنسبة أسعار عناصر الإنتاج $\frac{w}{r}$ ، فأي تعديل في هذه النسبة سيؤدي آليا الى تعديل مستوى التركز الرأسمالي أو الشدة أو الكثافة الرأسمالية l'intensité capitalistique، بمعنى النسبة $\frac{K}{L}$.

- **تعريف**: مرونة الإحلال، التي يرمز لها بـ σ، والتي تساوي التغير النسبي للكثافة الرأسمالية بالنسبة للتغير النسبي لنسبة أسعار عناصر الإنتاج. وتساوي:

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta(K/L)}{(K/L)}}{\frac{\Delta(w/r)}{(w/r)}}$$

وهي تقيس حساسية الهيكل التقني لكل تعديل في هيكل الأسعار. هذه المرونة تدل على علاقة تغير بين الكثافة الرأسمالية ونسبة أسعار عناصر الإنتاج. وتدل كذلك على تغير $\frac{K}{L}$ الناتج عن تغير $\frac{w}{r}$ بـ 1%.

7.2.1.دالة الإنتاج كوب دوغلاس وخصائصها:

ويتعلق الأمر بدالة إنتاج بعناصر إنتاج قابلة للإحلال، وهي دالة تم استعمالها بكثرة من قبل المدرسة الكلاسيكية الجديدة في نظرية الإنتاج، بالنظر إلى خصائصها الرياضية والاقتصادية.

وتكتب بالطريقة التالية: $Q = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$

حيث A ثابت وموجب ليس لديه أي معنى نظري، ولكن يبقى ضروري من أجل الحساب؛

[1] سنتطرق لهذه الدالة لاحقا.

K و L هما عناصر الإنتاج؛

α و β معاملات حيث $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$

- **خصائص دالة الإنتاج كوب دوغلاس:**

- هي دالة متجانسة من الدرجة : $\mathrm{n} = \alpha + \beta$

$$f(tK, tL) = A(tK)^{\propto}(tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta} = t^{\alpha+\beta}f(K, L)$$

- الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج رأس المال والعمل هي دائما متناقصة، وينتج عن ذلك أن المنتج موجود في المنطقة ll من الإنتاج:

في الواقع، $Pm_{\mathrm{K}} = \frac{dQ}{dK} = \alpha AK^{\alpha-1}\mathrm{L}^{\beta}$

وبما أن ميل الإنتاجية الحدية لرأس المال محدد بـ: $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Q}}{\mathrm{dK}^2} = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}\mathrm{L}^{\beta}$

حيث أن: $(\alpha - 1) < 0$ ومنه: $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Q}}{\mathrm{dK}^2} < 0$

نقوم بنفس التحليل بالنسبة بعنصر العمل فنصل إلى نفس النتائج:

لدينا، $Pm_{\mathrm{L}} = \frac{dQ}{dL} = \beta AK^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta-1}$

وبما أن ميل الإنتاجية الحدية لرأس المال محدد بـ: $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Q}}{\mathrm{dL}^2} = A\beta(\beta-1)L^{\beta-2}\mathrm{K}^{\alpha}$

حيث أن: $(\beta - 1) < 0$ ومنه: $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Q}}{\mathrm{dL}^2} < 0$

- المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST$

$$\mathrm{TMST} = \frac{Pm_{\mathrm{L}}}{Pm_{\mathrm{K}}} = \frac{\frac{dQ}{dL}}{\frac{dQ}{dK}} = \frac{\beta AK^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1}\mathrm{L}^{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}$$

- الأسس α و β تمثل المرونات الجزئية الإنتاج:

لدينا: $\mathrm{Q} = AK^{\alpha}L^{\beta}$

و: $e_{\mathrm{Q/K}} = \frac{dQ}{dK}\cdot\frac{K}{Q} = \alpha AK^{\alpha-1}\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{K}(AK^{\alpha}L^{\beta})^{-1} = \alpha$

و: $e_{\mathrm{Q/L}} = \frac{dQ}{dL}\frac{L}{Q} = \beta AL^{\beta-1}\mathrm{K}^{\alpha}\mathrm{L}(AK^{\alpha}L^{\beta})^{-1} = \beta$

ملاحظة:

- إذا كان $\alpha + \beta > 1$: مردوديات السلم متزايدة؛
- إذا كان $\alpha + \beta < 1$: مردوديات السلم متناقصة؛
- إذا كان $\alpha + \beta = 1$: مردوديات السلم ثابتة.

هذه النتائج تقترب من: $\mathrm{E} = e_{\mathrm{Q/K}} + e_{\mathrm{Q/L}}$

- مرونة الإحلال التقني $\sigma = 1$

لدينا: $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ ، ومنه حساب مرونة الإحلال يعطينا:

$$\sigma = \frac{\frac{d(K/L)}{(K/L)}}{\frac{d(w/r)}{(w/r)}} = \frac{\frac{d(K/L)}{(K/L)}}{\frac{dTMST}{TMST}}$$

بما أن: $TMST = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$

ومنه:

$$\sigma = \frac{\frac{d(K/L)}{(K/L)}}{\frac{(\beta/\alpha)d(K/L)}{(\beta/\alpha)(K/L)}} = 1$$

- **مثال عددي**:

أثبتت الدراسات التي أجريت على صناعة السيارات في الدول المصنعة أن دالة الإنتاج تأخذ الشكل التالي:

$$Q = f(K, L) = K^{\alpha}L^{0.5}$$

- إذا علمت أن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى أحسب قيمة α و ماذا تمثل؟
- إذا زاد العمل ورأس المال معا بـ: 10% ، فبكم يزيد الإنتاج الكلي؟
- أوجد معادلة المسار الأمثل للتوسع.
- إذا علمت أن : C= 100 و r = 2 و w = 1 ، ما هي كميات K و L التي تعظم الإنتاج؟

- **الحل**:

- حساب قيمة α و ماذا تمثل:

بما أن دالة الإنتاج من النوع Cobb-Douglas و متجانسة من الدرجة الأولى فان:

$$0.5 + \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0.5$$

حيث تمثل α: مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال $\left(\alpha = \frac{\partial X}{\partial K}.\frac{K}{X}\right)$

إذا زاد العمل ورأس المال معا بـ: 10% ، فان الإنتاج الكلي يزداد بنفس النسبة (10%) وهذا لأن دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى.

- إيجاد معادلة المسار الأمثل للتوسع:

لدينا دالة الإنتاج: $Q = f(K, L) = K^{0,5}L^{0.5}$

ولدينا في التوازن:

$$\text{TMST} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{\text{Pmg}_\text{L}}{\text{Pmg}_\text{K}} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{\frac{\partial \text{X}}{\partial \text{L}}}{\frac{\partial \text{X}}{\partial \text{K}}} = \frac{w}{r}$$

$$\frac{0,5\ L^{-0.5}K^{0.5}}{0,5\ K^{-0.5}L^{0.5}} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{\text{K}}{\text{L}} = \frac{w}{r} \rightarrow \text{K} = \frac{w}{r}\text{L} \qquad (1)$$

كميات K و L التي تعظم الإنتاج إذا كان : C= 100 و r = 2 و w = 1

بالتعويض قي دالة المسار نجد:

$$\mathrm{K} = \frac{w}{r}\mathrm{L} \rightarrow K = \frac{1}{2}L \qquad (1)$$

ودالة التكلفة:

$$C = wL + \mathrm{rK} \rightarrow 100 = \mathrm{L} + 2\mathrm{K} \qquad (2)$$

بتعويض (1) في (2) نجد:

$$100 = \mathrm{L} + 2\left(\frac{1}{2}L\right) \rightarrow 100 = 2L \rightarrow L = 50 \quad \text{و} \quad K = 25$$

8.2.1.دوال الطلب على عناصر الإنتاج:

على العموم تستخرج دوال الطلب على عناصر الإنتاج من طرف المنتج باعتبار الطلب على المنتوج الذي ينتجه المقاول، وتكتب دوال الطلب على عناصر الإنتاج على الشكل:

$$K = D^K(P, r, w)$$
$$L = L^K(P, r, w)$$

وتستخرج هذه الدوال من شروط الدرجة الأولى لتعظيم الربح.

- **مثال عددي:**

تكتب دالة الإنتاج لمؤسسة ما على الشكل: $Q = 2\, L^{\frac{1}{4}}\ K^{\frac{1}{4}}$

باعتبار P سعر المنتوج و r سعر رأس المال و w سعر العمل ،

- أوجد دوال الطلب على عناصر الإنتاج K و L؛
- أوجد دالة المسار الأمثل للإنتاج والكميات المستعملة من K وL إذا كانت الأسعار كالتالي:

$$r = 2\,,\ w = 1,\ P = 2$$

- **الحل:**

- إيجاد دوال الطلب على عناصر الإنتاج:

$$\pi = RT - CT = \mathrm{Q.P} - (\mathrm{wL} + \mathrm{rK}) = 2\mathrm{P}\, L^{\frac{1}{4}}\ K^{\frac{1}{4}} - wL - rK$$

$$\pi'_L = \frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{1}{2}\ PL^{-\frac{3}{4}}\ K^{\frac{1}{4}} - w = 0 \rightarrow \frac{P\, K^{\frac{1}{4}}}{2L^{\frac{3}{4}}} = w \qquad (1)$$

$$\pi'_K = \frac{\partial \pi}{\partial K} = \frac{1}{2}\ PL^{\frac{1}{4}}\ K^{-\frac{3}{4}} - r = 0 \rightarrow \frac{P\, L^{\frac{1}{4}}}{2K^{\frac{3}{4}}} = r \qquad (2)$$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) نجد:

$$\frac{\frac{P\, K^{\frac{1}{4}}}{2L^{\frac{3}{4}}}}{\frac{P\, L^{\frac{1}{4}}}{2K^{\frac{3}{4}}}} = \frac{w}{\mathrm{r}} \rightarrow \frac{K^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{3}{4}}}.\frac{K^{\frac{3}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}} = \frac{w}{\mathrm{r}} \rightarrow \frac{K}{L} = \frac{w}{\mathrm{r}} \rightarrow \mathrm{K} = \frac{w}{\mathrm{r}}\mathrm{L} \qquad (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في (1) نجد:

$$\frac{P\left(\frac{w}{\mathrm{r}}\mathrm{L}\right)^{\frac{1}{4}}}{2L^{\frac{3}{4}}} = w \rightarrow \frac{P\, w^{\frac{1}{4}}\, L^{\frac{1}{4}}}{2L^{\frac{3}{4}}\, r^{\frac{1}{4}}} = w \rightarrow \frac{P\, w^{\frac{1}{4}}}{2L^{\frac{1}{2}}\, r^{\frac{1}{4}}\, w} = 1 \rightarrow \frac{P}{2\, r^{\frac{1}{4}}\, w^{\frac{3}{4}}} = L^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow L = \frac{P^2}{4\, r^{\frac{1}{2}}\, w^{\frac{3}{2}}} \qquad (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في (3) نجد:

$$\mathrm{K} = \frac{w}{\mathrm{r}}\left[\frac{P^2}{4\, r^{\frac{1}{2}}\, w^{\frac{3}{2}}}\right] \rightarrow K = \frac{P^2}{4\, w^{\frac{1}{2}}\, r^{\frac{3}{2}}}$$

- إيجاد دالة المسار:

لدينا مما سبق (المعادلة (3)) :

$$\mathrm{K} = \frac{w}{\mathrm{r}}\mathrm{L} \rightarrow \mathrm{K} = \frac{1}{2}\mathrm{L}$$

- إيجاد كميات K و L :

بالتعويض في المعادلات (4) و (5) نجد:

$$L = \frac{P^2}{4\, r^{\frac{1}{2}}\, w^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2)^2}{4\,(2)^{\frac{1}{2}}\,(1)^{\frac{3}{2}}} = 0{,}71$$

$$K = \frac{P^2}{4\, w^{\frac{1}{2}}\, r^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2)^2}{4\,(1)^{\frac{1}{2}}\,(2)^{\frac{3}{2}}} = 0{,}35$$