جامعة 8 ماي 1945 – قالمة

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم العلوم التجارية

السنة الثانية ليسانس : علوم تجارية

" محاضرات مقياس : أساسيات بحوث العمليات"

مسؤول المقياس : أ/ بنية محمد

الوحدة : المنهجية

المعامل : 2

الرصيد : 4

الامتحان النهائي : 60 %

الأعمال الموجهة : 40 %

محتوى البرنامج :

الفصل الأول :- البرمجة الخطية : مفهومها و تطبيقاتها.

الفصل الثاني :- حل البرنامج الخطي بيانيا.

الفصل الثالث :- حل البرنامج الخطي العام " طريقة السمبليكس ".

الفصل الرابع :- الثنائية أو البرنامج المرافق.

الفصل الخامس :- النقل.

الفصل الأول: البرمجة الخطية: مفهومها و تطبيقاتها.

نتطرق أولا لمفهوم البرنامج الخطي في صورته الرياضية، ثم إلى مفهوم البرمجة الخطية، كأسلوب حديث في حل الكثير من المسائل الاقتصادية، و كيفية بناء هذه المسائل انطلاقا من المعطيات الواقعية للمؤسسة.

أولا : مفهوم البرنامج الخطي:

البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين، هدفها البحث عن **أمثلية** الاستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، تسمى **بدالة الهدف** أو **الدالة الاقتصادية**، في وجود مجموعة من **القيود** تكون في شكل **معادلات** أو **متراجحات** أو هما معا من الدرجة الأولى أيضا.

و المقصود من كلمة **أمثلية** هو الوصول إلى **أعظم** قيمة للدالة الاقتصادية أو **أدنى** قيمة لها حسب الحالة، في وجود تلك المجموعة من القيود، و ألحقت كلمة **" خطي"** بكلمة البرنامج لأن متغيرات كل من الدالة و القيود هي من الدرجة الأولى، أما إذا كانت من الدرجة الثانية أو الثالثة أو غير ذلك فإن البرنامج لا يكون خطيا، و حينئذ نتكلم عن البرمجة غير الخطية و هو غير موضوعنا.

تعريف:

إذا كانت لدينا مجموعة من المتغيرات و المعاملات في واقع معين، فإن البرنامج الخطي لهذا الواقع يعرف رياضيا حسب الحالة كما يلي :

1 ـ حالة التعظيم :

في حالة التعظيم يكتب البرنامج الخطي بصفة عامة كما يلي :

$$\text{Max} : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \end{cases}$$

حيث: Max تعني تعظيم، أي Maximisation، و مفادها جعل الدالة Z في أعظم قيمة لها.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: هي متغيرات البرنامج و المطلوب البحث عن قيمها، و يشترط أن تكون غير سالبة كما يدل على ذلك القيد الأخير، و عدم سالبيتها شرط منطقي يعود أساسا إلى أن الكميات لا يمكن أن تأخذ قيما سالبة.

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$: معاملات الدالة المراد تعظيمها شريطة احترام القيود، و تسمى هذه الدالة **بالدالة الاقتصادية** أو **دالة الهدف**، و يمكن أن تأخذ أية قيمة.

a_{11} ,a_{12}, a_{13}, ⋯,$a_{1n,}$ a_{21} ,a_{22}, a_{23}, ⋯,a_{2n}, a_{31} ,a_{32}, a_{33}, ⋯,a_{3n}, a_{m1} ,a_{m2}, a_{m3}, ⋯,a_{mn} : هي معاملات القيود و يمكن أيضا أن تأخذ أية قيمة.

b_1, b_2, b_3, …,b_m : شعاع الثوابت و يشترط أن تكون قيمه موجبة.

s/c أو ت/ق : تعني تحت القيود، و المراد هو تعظيم دالة الهدف في حدود الطاقات المتاحة المعبر عنها بمعادلات أو متراجحات.

و يمكن كتابة هذا البرنامج أيضا بالشكل المصفوفي على النحو التالي :

$$Max: \ Z = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \dots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s/c \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} a_{m2} a_{m3} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

و باختصار يكتب البرنامج كالتالي :

$$\text{Max} \ : \text{Z} = C'X$$

$$s/c \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث :

C' : هو منقول مصفوفة معاملات الدالة الاقتصادية.

X : هو شعاع المتغيرات.

A : هي مصفوفة معاملات القيود.

B : شعاع الثوابت.

مثال : أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي :

$$\text{Max} : Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 1080 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 960 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة :

الدالة الاقتصادية تكتب كما يلي :

$$Max: \ Z = \begin{bmatrix} 100 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على الشكل :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 400 \\ 1080 \\ 960 \end{bmatrix}$$

و في الأخير قيد عدم السالبية يكتب على الشكل :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 ـ حالة التدنية :

في حالة التدنية يكتب البرنامج الخطي بصفة عامة كما يلي :

$$\text{Min} : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \geq b_3 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \end{cases}$$

حيث: Min تعني تدنية، أي Minimisation، و مفادها جعل الدالة Z في أدنى قيمة لها تحت مجموعة القيود.

و يمكن كتابة هذا البرنامج أيضا بالشكل المصفوفي على النحو التالي :

$$Min: \ Z = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \dots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s/c \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} a_{m2} a_{m3} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

أما بالشكل المصفوفي المختصر فيكتب البرنامج على النحو التالي :

$$\text{Min} \ : \mathrm{Z} = C'X$$

$$s/c \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث :

C' : هو منقول مصفوفة معاملات الدالة الاقتصادية.

X : هو شعاع المتغيرات.

A : هي مصفوفة معاملات القيود.

B : شعاع الثوابت.

مثال : أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي :

$$\text{Min} : Z = 4x_1 + 18x_2 + 2x_3$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 14x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_3 \geq 14 \\ 2x_1 + 34x_2 + 30x_3 \geq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة :

الدالة الاقتصادية تكتب كما يلي :

$$Min: \ Z = \begin{bmatrix} 4 & 18 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب على الشكل :

$$s/c \begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 34 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

و في الأخير قيد عدم السالبية يكتب على الشكل :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يظهر من هذا العرض أن البرنامج الخطي في شكليه تعظيم أو تدنية يتألف من المكونات التالية:

أ ـ دالة الهدف :

تسمى أيضا بالدالة الاقتصادية و هي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه كتعظيم الإنتاج أو تعظيم الأرباح، أو تدنية التكاليف ... إلخ، و تكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.

ب ـ القيود :

هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا، تريد المؤسسة أن تجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الاعتبار، يتألف شقها الأيسر من مجموعة من المعاملات مضروبة في مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أما شقها الأيمن فهو عبارة عن أعداد ثابتة موجبة.

ج ـ شرط عدم السالبية :

و يعني أن قيم كل المتغيرات يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر، لكونها تتعلق بكميات مادية "فيزيائية"، و الكميات المادية لا يمكن أن تساوي قيم سالبة، و في حالات استثنائية أين لا يشترط هذا القيد، فإن هناك معالجة خاصة أثناء سيرورة الحل.

ثانيا : مفهوم البرمجة الخطية :

إن تشكيل البرنامج الذي رأينا سابقا انطلاقا من مسائل واقعية، و طرق حل البرنامج و الوصول إلى قيمة المتغيرات التي تعطي الحل الأمثل و إشكاليات ذلك، هي من الموضوعات التي تدرسها البرمجة الخطية، و يظهر من هذا أن البرمجة الخطية ليست علما مستقلا بذاته و لا هي تقنية، بل هي مجموعة من الطرق الخاضعة لموضوع **"بحوث العمليات"**، و الذي هو عبارة عن مجموعة من طرق التحليل العلمي.

يبحث على وجه الخصوص أمثليات الاستخدام للموارد الاقتصادية على مستوى الاقتصاد الجزئي خاصة، و ذلك بالاعتماد على الأساليب الرياضية.

ثالثا : مجالات استخدام البرمجة الخطية :

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية، بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

و من المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الاقتصادية و المالية و التجارية و علوم التسيير، عامة ما يلي :

1 - في حالة التعظيم :

- تعظيم الأرباح.
- تعظيم الإنتاج.
- تعظيم طاقات التخزين.

- تعظيم استخدام رؤوس الأموال.
- تعظيم استخدام اليد العاملة.

و غير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

2 ـ في حالة التدنية :

- تدنية التكاليف.
- تدنية الخسائر.
- تدنية عدد الموظفين.
- تدنية الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة و غير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

رابعا : بناء البرنامج الخطي :

تشكيل أو بناء البرنامج الخطي هو أهم خطوة في البحث عن الأمثلية، و يقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية، إلى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح، متكون من عدد من المتغيرات، به دالة هدف كما تمت الإشارة إليه سابقا، تكون إما في حالة تعظيم أو تدنية، و عدد من القيود تكون إما في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا.

و لتشكيل البرنامج الخطي ينبغي أولا تحديد المتغيرات، ثم تشكيل **جدول المسألة** بعد ذلك، بحيث يحتوي هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات و قيود و كذا الكميات المحددة لدالة الهدف، و قبل ذلك ينبغي التأكد من تجانس المعطيات، إذ ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المتشابهة متجانسة، كما ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المكونة لدالة الهدف أيضا متجانسة، و يمكن للمثال التالي أن يعطي نضرة واضحة حول كيفية تشكيل البرنامج الخطي لمسألة ما.

مثال :

مؤسسة اقتصادية بها 3 ورشات لإنتاج 3 أنواع من المنتوجات هي :

- خزائن حديدية. - مكاتب إدارية. - كراسي.

بحيث أن كل منتوج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي :

- **الورشة (1) :** تجرى بها عملية صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها هي : 32 ساعة عمل يوميا، (أي 4 عمال كل عامل يشتغل 8 ساعات يوميا).
- **الورشة (2) :** تجرى بها عملية تركيب الملحقات، طاقة العمل القصوى بها هي : 24 ساعة عمل يوميا.
- **الورشة (3) :** تجرى بها عملية الإنهاء (طلاء، تزيين، تغليف)، طاقة العمل القصوى بها هي : 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق **أكبر ربح ممكن**، و لأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها :

أن الوحدة الواحدة من المنتوج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 2 ساعة عمل في الورشة الثانية و 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة، بينما الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 4 ساعات عمل في الورشة الثانية و 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة، و أخيرا الوحدة الواحدة من المنتوج الثالث تتطلب 5 ساعات عمل في الورشة الأولى و 3 ساعات عمل في الورشة الثانية و 1 ساعة عمل في الورشة الثالثة.

كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتوج هو :

- المنتوج الأول : 200 دج.
- المنتوج الثاني : 150 دج.
- المنتوج الثالث : 120 دج.

المطلوب :

أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة، و التي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة ؟

الإجابة :

أول خطوة في إيجاد الصيغة الرياضية هي **تحديد المتغيرات** : بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لتعظيم أرباحها، لذلك فإن المجاهيل هي : عدد الخزائن و عدد المكاتب و عدد الكراسي، و هي بالتالي متغيرات المسألة، لذلك نضع :

- عدد الخزائن : x_1 - عدد المكاتب : x_2 - عدد الكراسي : x_3

ثاني خطوة هي تحديد **جدول المسألة** : و هو جدول مساعد يحتوي على كل عناصر القيود و عناصر دالة الهدف، بحيث توضع المتغيرات بشكل عمودي و معطيات القيود و دالة الهدف بشكل أفقي، و ذلك كما يظهر في الجدول :

منتوجات / ورشات	الوقت المستغرق في كل ورشة بالساعات			الطاقة القصوى للورشات سا/ع
	المنتوج 1 : x_1	المنتوج 2 : x_2	المنتوج 3 : x_3	
الورشة (1)	4	4	5	32
الورشة (2)	2	4	3	24
الورشة (3)	2	2	1	16
ربح الوحدة الواحدة (دج)	200	150	120	

الجدول أعلاه يلخص لنا بشكل كافي معطيات المسألة، و منه يظهر على سبيل المثال أن إنتاج وحدة واحدة من المنتوج الثاني يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و إنتاج وحدتين يتطلب 4*2 ساعة عمل و إنتاج الكمية x_2 يتطلب $4x_2$ ساعة عمل، و إذا ما تم إنتاج وحدة واحدة من كل منتوج فإن ذلك يتطلب : 4*1+4*1+5*1= 13 ساعة عمل في الورشة الأولى، بينما الطاقة القصوى للورشة الأولى هي 32 ساعة عمل.

و إذا ما أريد إنتاج الكميات : x_1، x_2، x_3 من كل منتوج، فإن وقت العمل المستغرق في الورشة الأولى هو : $4x_1 + 4x_2 + 5x_3$، و يجب أن لا يتجاوز 32 ساعة عمل و هي الطاقة القصوى لهذه الورشة، و بالمثل بالنسبة لبقية المنتوجات، و عليه نستنتج منظومة القيود التالية :

1 - قيد الورشة الأولى : $4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 32$

2 - قيد الورشة الثانية : $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24$

3 - قيد الورشة الثالثة : $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 16$

يعني القيد الأول أن الوقت المستغرق في إنتاج الكميات x_1، x_2، x_3، يجب أن لا يتعدى 32 ساعة عمل في الورشة الأولى و تفسر بقية القيود بشكل مشابه.

و بما أن الكميات يستحيل أن تكون سالبة، لذلك فإن القيد الأخير يكتب كما يلي :

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

كما يظهر من الجدول أيضا أن الوحدة الواحدة من المنتوج (1) تجلب ربحا مقداره 200 وحدة نقدية، و عند إنتاج وحدتين فإن الربح المحصل عليه من المنتوج الأول هو 400 وحدة نقدية، و بالتالي إنتاج الكمية x_1 يجلب للمؤسسة $200*x_1$، و بالمثل بالنسبة للمنتوجين الثاني و الثالث، و عليه نصمم دالة الهدف على النحو التالي :

$$Max : Z=200x_1+ 150x_2+ 120x_3$$

أي أن الهدف هو إيجاد قيم x_i التي تجعل Z في أعظم قيمة لها، دون تجاوز قدرات الورشات.

و عليه يكون البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي :

$$\text{Max} : Z = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 32 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و نكون بذلك قد انتقلنا من الشكل الوصفي للمسألة إلى شكلها الرياضي، و هو ما يصطلح عليه **بتشكيل البرنامج الخطي** أو **بناء النموذج الخطي**، و هو مؤلف من مجمعين أساسين، الأول هو دالة الهدف المراد تعظيمها، و الثاني هو مجموعة القيود التي يجب احترامها.

شكرا على حسن الإصغاء