جامعة 8 ماي 1945 – قالمة

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم العلوم التجارية

السنة الثانية ليسانس : علوم تجارية

" محاضرات مقياس : أساسيات بحوث العمليات"

مسؤول المقياس : أ/ بنية محمد

الوحدة : المنهجية

المعامل : 2

الرصيد : 3

الامتحان النهائي : 60 %

الأعمال الموجهة : 40 %

محتوى البرنامج :

الفصل الأول :- البرمجة الخطية : مفهومها و تطبيقاتها.

الفصل الثاني :- حل البرنامج الخطي بيانيا.

الفصل الثالث :- حل البرنامج الخطي العام " طريقة السمبليكس ".

الفصل الرابع :- الثنائية أو البرنامج المرافق.

الفصل الخامس :- النقل.

الفصل الثالث : حل البرنامج الخطي العام " طريقة السمبليكس " :

طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول كما تسمى أحيانا تستخدم سواء كان عدد متغيرات البرنامج الخطي اثنين أو أكثر من ذلك، و هي تعتمد على خوارزمية تسمى **بخوارزمية السمبليكس- L'algorithme du simplexe**، قبل الخوض في إيجاد الحل بهذه الطريقة ينبغي التعرف على بعض أنواع الصيغ الخطية و بعض المصطلحات، و من ذلك ما يلي :

أولا : الصيغة القانونية للبرنامج الخطي :

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية القانونية، و هي حسب الحالة كما يلي :

1 - حالة التعظيم : في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي :

أ - دالة الهدف تكون في حالة تعظيم.

ب - التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي

عددا ثابتا موجبا.

ج - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي :

$$\text{Max} \;: \text{Z} = C'X$$

$$s/c\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث : C' : يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، X : هو شعاع المتغيرات، A : هي مصفوفة معاملات القيود، B : شعاع الثوابت.

مثال : البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته القانونية :

$$\text{Max} \;: \text{Z} = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2- حالة التدنية :

حتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي :

أ - دالة الهدف تكون في حالة تدنية.

ب - التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا.

ج - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي :

$$\mathrm{Min} \; : \mathrm{Z} = C'X$$

$$s/c \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

مثال : البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته القانونية :

$$\text{Min} \ : Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 10 \\ x_1 + 3x_3 \geq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ثانيا : الصيغة المختلطة :

هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة تعظيم أو في حالة تدنية، و القيود مختلطة بحيث تحتوي متراجحات "أكبر من أو تساوي" و "أقل من أو تساوي" و معادلات، كل هذه الحالات معا أو حالتين من هذه الحالات على الأقل.

مثال : البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته المختلطة :

$$\text{Max } : Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 10 \\ x_1 + 3x_3 \ge 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 = 25 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

ثالثا : الصيغة النموذجية :

و فيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنية.

تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، باعتبار ذلك أول خطوة في اتجاه الحل.

رابعا : إيجاد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول :

لإيجاد الصيغة النموذجية في حالة كون القيد عبارة عن متراجحة لابد من ادخال متغيرات صورية جديدة على البرنامج.

بإضافتها أو طرحها حسب الحالة لتتحول القيود إلى معادلات، تسمى هذه المتغيرات **بمتغيرات الفجوة** لأنها تسد الفرق **"الفجوة"** الموجودة بين طرفي المتراجحة، و يتم ذلك حسب الحالات كما يلي :

الحالة الأولى : إذا كان القيد على الشكل :

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

لتحويل القيد إلى معادلة "متساوية" ينبغي أن نضيف إلى الطرف الأيسر متغيرة صورية تسمى متغيرة الفجوة، نرمز لها بالرمز x_j^e حيث j ترتيب المتغيرة و e ترمز إلى الفجوة - écart، و عليه فإن القيد أعلاه ليصبح عبارة عن معادلة فإننا نكتبه كما يلي :

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+1}^e = b_m$$

حيث : x_{n+1}^e :

أضيفت إلى الطرف الأيسر لترجحه فيصبح الطرف الأيسر مساويا للطرف الأيمن، و بمعنى آخر أضيفت لتغلق الفجوة بين الطرفين لذلك سميت بمتغيرة الفجوة.

و تمثل متغيرات الفجوة الطاقات غير المستعملة أو الطاقات العاطلة، و هي متغيرات يجب أن تكون أيضا غير سالبة.

ينبغي الإشارة إلى أنه عند إدخال متغيرة الفجوة إلى القيد، فإنه ينبغي إدخالها أيضا على دالة الهدف لكن بمعامل يساوي الصفر على اعتبار أنها خارج النظام، و تسمى مصفوفة معاملات القيود المحصل عليها بعد إضافة متغيرات الفجوة **بمصفوفة الحل الأساسي الأول**.

مثال : أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج التالي :

$$\text{Max} \;: Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن كل القيود عبارة عن متراجحات، و بالتالي فينبغي إضافة إلى كل منها متغيرة للفجوة على النحو التالي :

القيد الأول يكتب كما يلي : $2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4^e = 10$

القيد الثاني يكتب كما يلي : $x_1 + 3x_3 + x_5^e = 7$

القيد الثالث يكتب كما يلي : $x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6^e = 25$

لاحظ أننا ميزنا بين متغيرات الفجوة المضافة فأعطيناها ترتيبا متزايدا و مغايرا للمتغيرات الحقيقية، و هي غير متساوية في الغالب لعدم تساوي الطاقات غير المستعملة في كل قيد.

و عليه يصبح البرنامج بالصيغة النموذجية على النحو التالي :

$$\text{Max} \;: Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4^e = 10 \\ x_1 + 3x_3 + x_5^e = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6^e = 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4^e \geq 0, x_5^e \geq 0, x_6^e \geq 0 \end{cases}$$

و يجب أن تضاف متغيرات الفجوة بالشكل الذي يضمن الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود، كما يظهر في المصفوفة أدناه :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^e & x_5^e & x_6^e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 3 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 17 & 15 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

تسمى هذه المصفوفة **بمصفوفة الحل الأساسي الأول**، و هي تتضمن مصفوفة أحادية كما تظهره الأعمدة 4، 5 و 6، و لا يشترط أن تكون هذه الأعمدة متحاذية و هي ضرورية، إذ تعتبر الصيغة القانونية و من ثم المصفوفة الأحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود، أولى خطوات البحث عن الحل الأمثل بطريقة السمبليكس.

الحالة الثانية : إذا كان القيد على الشكل :

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

و هي الحالة الغالبة في حالة التدنية.

لتحويل القيد إلى الشكل النموذجي أي تحويله إلى معادلة "متساوية"، ينبغي أن نطرح من الطرف الأيسر متغيرة صورية هي **متغيرة الفجوة** كما جرت العملية في الحالة الأولى، و عليه يصبح القيد المشار إليه أعلاه كما يلي :

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+1}^e = b_m$$

يلاحظ أن معامل متغيرة الفجوة يأخذ إشارة سالبة و بالتالي فهو لا يتيح لنا إمكانية الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود، لذلك يتم الاستعانة بمتغيرات أخرى تسمى **بالمتغيرات الاصطناعية**، و يفترض أن تكون قيمتها معدومة و معاملها يساوي +1 و بالتالي فهي مجرد **متغيرات مساعدة**، و نميزها عن متغيرات الفجوة بالحرف a فنكتبها على الشكل x_j^a،حيث الحرف a يرمز إلى أنها اصطناعية أي أول حرف من المصطلح artificielle.

كما ينبغي إجراء تغييرات على دالة الهدف، فتضاف متغيرات الفجوة إليها بمعاملات صفرية، أما المتغيرات الاصطناعية فتضاف إليها على أن تأخذ معاملات يفترض أن تكون **كبيرة جدا** و بإشارة **سالبة** نرمز لها بـ M إذا كانت دالة الهدف في **حالة تعظيم**، و بإشارة **موجبة** إذا كانت دالة الهدف في **حالة تدنية**، و تجرى مجموعة من التحويلات الأخرى عليها كما يوضحه المثال التالي :

مثال : أوجد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج التالي :

$$\text{Max } : Z = 20x_1 + 15x_2$$

$$s/c \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول نجري التحويلات التالية على النظام :

القيد الأول يكتب كما يلي : $7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14$

القيد الثاني يكتب كما يلي : $8x_1 + 16x_2 + x_5^e = 16$

القيد الثالث يكتب كما يلي : $2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a = 10$

أما دالة الهدف فتكتب كما يلي :

$$\text{Max} \;: Z = 20x_1 + 15x_2 + 0x_3^e - Mx_4^a + 0x_5^e + 0x_6^e - Mx_7^a$$

أو : $$\text{Max} \;: Z = 20x_1 + 15x_2 - Mx_4^a - Mx_7^a$$

يتم تعويض قيم x_4^a و x_7^a في دالة الهدف بقيمهما المستخرجة من القيدين الأول و الثالث على النحو التالي :

من القيد الأول نجد : $x_4^a = 14 - 7x_1 - 2x_2 + x_3^e$

من القيد الثالث نجد : $x_7^a = 10 - 2x_1 - 5x_2 + x_6^e$

بالتعويض في دالة الهدف و فك الأقواس و ضم الحدود المتشابهة نصل إلى النظام التالي :

$$\text{Max } : Z = (20 + 9M)x_1 + (15 + 7M)x_2 - Mx_3^e - Mx_6^e - 24M$$

$$s/c\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_5^e = 16 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a = 10 \end{cases}$$

و تكون مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج كما يلي :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3^e & x_4^a & x_5^e & x_6^e & x_7^a \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

يلاحظ أن هذه المصفوفة تحتوي على عدد من الأعمدة تشكل عند محاذاتها مصفوفة أحادية، (الأعمدة 4، 5 و 7) و هو مبرر التحولات التي تم إجرائها على النظام.

خامسا : إيجاد الحل في حالة التعظيم :

لإيجاد الحل بطريقة الجداول " السمبليكس " في حالة التعظيم يتم اتباع الخوارزمية التالية :

1 - نبحث عن الصيغة النموذجية بحيث نجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية.

2 - نرتب البيانات في جدول هو الجدول (1) و يسمى **بجدول الحل الأساسي الأول**، فيه تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس " رئيسية " أو متغيرات داخل الأساس (قيمها عند بداية الحل هي المقابلة لها في عمود الثوابت)، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس (قيمها في الجدول الأول معدومة)، و تكون قيمة دالة الهدف أيضا معدومة.

فإذا كان البرنامج الخطي على النحو :

$$\text{Max} \ : Z = c_1x_1 + \ c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

فإن صيغته النموذجية هي :

$$\text{Max} \ : Z = c_1x_1 + \ c_2x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3^e = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4^e = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5^e = b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^e \geq 0, x_5^e \geq 0 \end{cases}$$

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي :

		x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	**B**	
متغيرات الأساس $\rightarrow$	x_3^e	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1	**عمود الثوابت** $\leftarrow$
	x_4^e	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2	
	x_5^e	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3	
ΔZ		c_1	c_2	0	0	0	0	**قيمة الدالة** $\leftarrow$

لاحظ أن متغيرات الأساس الموضوعة في العمود الأول من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة 1 من أعمدة المصفوفة الأحادية، و تكون في جدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات اصطناعية أو هما معا، و في المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، و تحل محلها متغيرات أخرى.

و في هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير (عمود الثوابت).

أي : $x_3^e=b_1, x_4^e=b_2, x_5^e=b_3$ أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي معدومة أي : $Z=0$ و هي تظهر في آخر خانة من الجدول، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

3 ـ انطلاقا من الجدول (1) نحضر لإعداد **جدول الحل الأساسي الثاني " الجدول الثاني "**، و ذلك باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج من الأساس و كذلك **عنصر الارتكاز**، المعرف لاحقا.

ـ **المتغيرة التي تدخل الأساس :** هي التي يكون لها أكبر معامل في الدالة الاقتصادية، أي أكبر قيمة في السطر الأخير (ΔZ)، (و هي المتغيرة التي تعطي أكبر عائد للدالة الاقتصادية)، يسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل الأساس **بعمود عنصر الارتكاز** أو العمود الأمثل.

- **المتغيرة التي تخرج من الأساس :** هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة ناتجة عن تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود) على عمود عنصر الارتكاز، يسمى سطر المتغيرة التي تخرج من الأساس **بسطر عنصر الارتكاز**.

4 - جدول الحل الأساسي الموالي يتم اعداده كما يلي :

- نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس، و ذلك في العمود الأول من الجدول أي عمود متغيرات الأساس.

- يجري تحويل عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 و عناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة.

- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.

- يجري تحويل بقية عناصر الجدول إما باستخدام طريقة التركيبات الخطية أو باستخدام قاعدة المستطيلات و هي على النحو التالي :

إذا كانت عناصر جدول الحل الأساسي كما يلي :

					جدول (1)
عنصر الارتكاز	**a**		b		
	c		d		

فإنه يتم إجراء التحويلات للانتقال إلى جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي :

يتم تقسيم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز، بحيث يصبح مكان a القيمة 1 و مكان b القيمة b/a، و تتحول بقية عناصر عمود الارتكاز إلى أصفار فيصبح مكان القيمة c القيمة صفر.

أما القيمة التي تحل مكان d فتحسب كما يلي : $d - \frac{b \times c}{a}$

و بالمثل تحسب بقية العناصر الأخرى، أي العنصر المرشح للتغيير مطروحا منه جداء العنصرين المقابلين له على كل من سطر عنصر الارتكاز و عمود عنصر الارتكاز مقسوما على قيمة عنصر الارتكاز، و تصبح عناصر الجدول الموالي كما يلي :

جدول (2)

	1		b/a	
	0		$d - \frac{b \times c}{a}$	

و بالمثل إذا كانت معطيات الجدول كما يلي :

					جدول (1)
	d		c		
	b		**a**		
					عنصر الارتكاز

فإن الجدول الموالي يصبح كما يلي :

					جدول (2)
	$d - \dfrac{b \times c}{a}$		0		
	b/a		1		

5 ـ نستمر في عملية تحويل الجدول بالعودة ثانية إلى الخطوة (3)، و هذا حتى تصبح كل معاملات الدالة الاقتصادية (السطر الأخير) سالبة أو معدومة، و حينئذ نكون أمام **جدول الحل الأمثل** و فيه تكون قيم المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي إلى القيم الجديدة الحاصلة في عمود الثوابت على وجه التقابل و بقية المتغيرات تكون معدومة.

أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

مثال : أوجد حل للبرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max} \ : Z = 100x_1 + \ 60x_2$$

$$s/c \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \le 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \le 96 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

نجد أولا الصيغة النموذجية :

$$\text{Max} \ : Z = 100x_1 + \ 60x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3^e = 40 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_4^e = 108 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_5^e = 96 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3^e \ge 0, x_4^e \ge 0, x_5^e \ge 0 \end{cases}$$

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B	النسبة
x_3^e	8	2	1	0	0	40	5
x_4^e	6	9	0	1	0	108	18
x_5^e	8	6	0	0	1	96	12
ΔZ	100	60	0	0	0	0	

2 - **المتغيرة التي تدخل الأساس :** هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر الدالة الاقتصادية و بالتالي فهي المقابلة للقيمة 100 أي x_1، و بالتالي فعمود عنصر الارتكاز هو العمود الأول.

3 - **المتغيرة التي تخرج من الأساس :** هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين النسب الحاصلة من جراء تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز، و هي 5 و عليه فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي x_3^e.

و يكون عنصر الارتكاز هو القيمة التي يتقاطع عندها عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز، أي هو القيمة 8 المؤطرة في الجدول أعلاه.

نجري التحويلات التالية للحصول على جدول الحل الأساسي الثاني :

- نقسم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز فيصبح هذا السطر على وجه الترتيب كما يلي :

1 1/4 1/8 0 0 5

- يتحول عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي، أي أن قيمة عنصر الارتكاز تصبح 1 بموجب التحويل أعلاه، أما بقية عناصر العمود فتتحول إلى أصفار.

- بقية أعمدة المتغيرات الداخلة في الأساس تبقى أحادية.

- بقية عناصر الجدول تحسب بطريقة المستطيلات، و على سبيل المثال، القيمة 9 في الجدول السابق تحول على النحو التالي :

$$9-\frac{2\times 6}{8}=\frac{15}{2}$$

و القيمة 96 في عمود الثوابت من الجدول السابق تصبح على النحو :

$$96-\frac{40\times 8}{8}=56$$

و القيمة 0 التي تعبر عن قيمة الدالة الاقتصادية بالقيمة المطلقة الموجودة في آخر خانة من الجدول تصبح كما يلي :

$$0-\frac{40\times 100}{8}=-500$$

و بالمثل يتم حساب بقية العناصر، و النتائج معروضة في الجدول الموالي :

	x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3^e	x_4^e	x_5^e	**B**	النسبة
x_1	1	**1/4**	1/8	0	0	5	**20**
$\mathbf{x_4^e}$	**0**	**15/2**	**-3/4**	**1**	**0**	**78**	**10,4**
x_5^e	0	**4**	-1	0	1	56	**14**
ΔZ	0	**35**	-25/2	0	0	-500	

يلاحظ أن قيمة الدالة الاقتصادية تحسنت فانتقلت قيمتها من 0 إلى 500، كما دخلت متغيرة حقيقية إلى الأساس و أصبحت قيم المتغيرات كما يلي :

$$x_1 = 5$$

$$x_4^e = 78$$

$$x_5^e = 56$$

أما بقية المتغيرات غير الموجودة في عمود متغيرات الأساس فهي تساوي إلى الصفر، أي :

$$x_2 = 0$$

$$x_3^e = 0$$

أما قيمة دالة الهدف فتساوي $|-500|$ أي 500.

و يمكن التأكد من صحة نتيجة دالة الهدف بالتعويض في الدالة فنجدها كما يلي :

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \times 5 + 60 \times 0 = 500$$

و هي نفس القيمة التي تظهر في آخر خانة من عمود الثوابت، و الفرق فقط هو أنها تأخذ الإشارة السالبة في الجدول.

السؤال المطروح الآن، هو هل أننا توصلنا إلى الحل الأمثل ؟ و الجواب هو أنه ما دامت هناك قيم أكبر من الصفر في السطر الأخير من الجدول ـ سطر معاملات الدالة ـ فإن الحل الأمثل لم يتحقق بعد و ينبغي إجراء خطوة أخرى لتحسينه.

و نعود من جديد فنختار عمود المتغيرة التي تدخل الأساس و هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر معاملات الدالة - السطر الأخير - من الجدول، و عليه فإن المتغيرة x_2 هي التي تدخل الأساس باعتبارها تقابل أكبر قيمة و هي 35، و يتحدد بذلك عمود عنصر الارتكاز، بتقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز يتحدد لنا سطر عنصر الارتكاز و هو السطر الثاني، و تتعين بذلك المتغيرة التي تخرج من الأساس و هي x_4^e، و يكون عنصر الارتكاز هو 15/2، و نجري تحويلات مشابهة لتحويلات المرحلة السابقة و هي :

- نقسم سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز.
- نحول عمود الارتكاز إلى عمود أحادي.
- نبقي بقية أعمدة المتغيرات الداخلة في الأساس أحادية.
- نجري تحويلات بقية العناصر بطريقة المستطيلات.

و نحصل بذلك على الجدول التالي :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	**B**
x_1	1	0	3/20	-1/30	0	**12/5**
x_2	0	1	-1/10	2/15	0	**52/5**
x_5^e	0	0	-3/5	-8/15	1	**72/5**
ΔZ	0	0	-9	-14/3	0	**-864**

كل معاملات الدالة الاقتصادية أي السطر الأخير أصبحت سالبة، و بالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل.

و تكون النتائج المحصل عليها هي :

$$x_1 = 12/5 = 2{,}4$$

$$x_2 = 52/5 = 10{,}4$$

$$x_5^e = 72/5 = 14{,}4$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

و نلاحظ أن الدالة الاقتصادية تحسنت و انتقلت قيمتها من 500 إلى 864، و يمكن إثبات ذلك بالتعويض في الدالة كما وردت حيث نجد :

$$Z = 100x_1 + 60x_2 = 100\frac{12}{5} + 60\frac{52}{5} = 864$$

و بالتالي فإن قيم المتغيرات التي تجعل الدالة في أعظم قيمة لها هي :

$$x_1 = 2,4$$
$$x_2 = 10,4$$

كما أن هذه النتائج تحقق القيدين الأول و الثاني تماما، أما القيد الثالث فيحتوي على طاقة عاطلة قيمتها 14,4 و تعبر عنها متغيرة الفجوة $x_5^e=14,4$، كما يمكن إثبات ذلك من خلال التعويض في القيود.

القيد الأول : $8x_1 + 2x_2 \leq 40 \Rightarrow 8 \times 2,4 + 2 \times 10,4 = 40$

أي أن القيد محقق تماما.

القيد الثاني : $6x_1 + 9x_2 \leq 108 \Rightarrow 6 \times 2,4 + 9 \times 10,4 = 108$

أي أن القيد محقق تماما.

القيد الثالث : $8x_1 + 6x_2 \leq 96 \Rightarrow 8 \times 2{,}4 + 6 \times 10{,}4 = 81{,}6$

أي أن القيد محقق تماما، و تبقى طاقة عاطلة (غير مستعملة) قيمتها $14{,}4$ و هي قيمة متغيرة الفجوة المضافة أي $x_5^e = 14{,}4$، كما تظهر في الجدول السابق.

سادسا : إيجاد الحل في حالة التدنية :

لإيجاد الحل بطريقة الجداول " السمبليكس " في حالة التدنية يتم اتباع الخوارزمية التالية :

1 - نبحث عن الصيغة النموذجية بحيث نجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية، و حيث أن القيود تكون في الغالب في حالة أكبر أو تساوي، لذلك نستعمل متغيرات الفجوة في إيجاد المساواة و المتغيرات الاصطناعية في إيجاد المصفوفة الأحادية.

2 - نرتب البيانات في جدول هو الجدول (1) و يسمى **بجدول الحل الأساسي الأول**، فيه تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس " رئيسية "، في حالة ما إذا كانت معاملاتها 1+ أو تكون المتغيرات الاصطناعية هي متغيرات أساس و هي الحالة الأكثر مصادفة، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس (قيمها في الجدول الأول معدومة)، و تكون قيمة دالة الهدف أيضا معدومة، و ينبغي إدخال تحويلات عليها لإخراج المتغيرات الاصطناعية منها، و ذلك حسب التوضيح التالي :

فإذا كان البرنامج الخطي على النحو :

$$\mathrm{Min} : \mathrm{Z} = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

فإن صيغته النموذجية هي :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3^e + x_4^a = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_5^e + x_6^a = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_7^e + x_8^a = b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0, \\ x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0, x_7^e \geq 0, x_8^a \geq 0 \end{cases}$$

و تجرى التحويلات التالية على دالة الهدف :

$$\mathrm{Z} = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

حيث M هو معامل المتغيرات الاصطناعية و يأخذ قيمة كبيرة جدا بإشارة موجبة، و هذا حتى تكون المتغيرات المصاحبة له من أولى المتغيرات التي تخرج من الأساس، لأن مقتضى تصغير الدالة يتطلب إخراج المتغيرات ذات المعاملات الأكبر، و هو ما تعمل على أساسه خوارزمية الحل.

من القيود المعدلة لدينا نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية بدلالة بقية المتغيرات و هي :

$$x_4^a = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + x_3^e$$
$$x_6^a = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_5^e$$
$$x_8^a = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + x_7^e$$

بتعويض قيمة المتغيرات في الدالة الاقتصادية المحولة و هي :

$$\mathrm{Z} = c_1x_1 + \ c_2x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a$$

بعد جمع الحدود المتشابهة نحصل على الشكل الجديد للدالة الاقتصادية و هي :

$$\mathrm{Z} = [c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M]x_1 + \ [c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M]x_2$$
$$+Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e + M(b_1 + b_2 + b_3)$$

بمساواة الدالة إلى الصفر و هي نقطة الانطلاق دائما، نجد :

$$[c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M]x_1 + \ [c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M]x_2$$
$$+ Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e = -M(b_1 + b_2 + b_3)$$

و يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	a_{11}	a_{12}	-1	1	0	0	0	0	b_1
x_6^a	a_{21}	a_{22}	0	0	-1	1	0	0	b_2
x_8^a	a_{31}	a_{32}	0	0	0	0	-1	1	b_3
ΔZ	$c_1-(a_{11}+a_{21}+a_{31})M$	$c_2-(a_{12}+a_{22}+a_{32})M$	M	0	M	0	M	0	$-M(b_1+b_2+b_3)$

في هذا الجدول أيضا تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة في العمود الأخير إلى اليمين، و نلاحظ أن المتغيرات الاصطناعية تكون إجباريا داخل الأساس، لأن كل متغيرات الأساس يجب أن تشمل عمود يشكل أحد أعمدة المصفوفة الأحادية الواجب توفرها في مصفوفة جدول الحل الأساسي الأول، و لا شك أن السبب الرئيسي لإضافة المتغيرات الاصطناعية هو توفير هذا الشرط.

3 - انطلاقا من الجدول (1) نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الموالي " الجدول الثاني "، و ذلك باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و المتغيرة التي تخرج من الأساس و كذلك **عنصر الارتكاز**.

- **المتغيرة التي تدخل الأساس :** هي التي يكون لها أصغر قيمة سالبة في السطر الأخير من الجدول، يسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل الأساس **بعمود عنصر الارتكاز**.

- **المتغيرة التي تخرج من الأساس :** هي المقابلة لأصغر **نسبة موجبة** ناتجة عن تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود) على عمود عنصر الارتكاز، يسمى سطر المتغيرة التي تخرج من الأساس بسطر عنصر الارتكاز.

4 - جدول الحل الأساسي الموالي يتم اعداده كما يلي :

- نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس، و ذلك في العمود الأول من الجدول أي عمود متغيرات الأساس.

- يجري تحويل عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 و عناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة.

- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.

- يجري تحويل بقية عناصر الجدول إما باستخدام طريقة التركيبات الخطية أو باستخدام قاعدة المستطيلات، كما تم ذلك في حالة التعظيم، و هي على النحو التالي :

جدول (1)

	a		b		
عنصر الارتكاز					
	c		d		

فإنه يتم إجراء التحويلات للانتقال إلى جدول الحل الأساسي الثاني كما يلي :

يتم تقسيم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز، بحيث يصبح مكان a القيمة 1 و مكان b القيمة b/a، و تتحول بقية عناصر عمود الارتكاز إلى أصفار، فيصبح مكان القيمة c القيمة صفر، أما القيمة التي تحل مكان d فتحسب كما يلي :

$$d - \frac{b \times c}{a}$$

و بالمثل تحسب بقية العناصر الأخرى، أي العنصر المرشح للتغيير مطروحا منه جداء العنصرين المقابلين له على كل من سطر عنصر الارتكاز و عمود عنصر الارتكاز مقسوما على قيمة عنصر الارتكاز، و تصبح عناصر الجدول الثاني كما يلي :

					جدول (2)
	1		b/a		
	0		$d - \dfrac{b \times c}{a}$		

5 - نستمر في عملية تحويل الجدول بالعودة ثانية إلى الخطوة (3)، و هذا حتى تصبح كل معاملات الدالة الاقتصادية (السطر الأخير) موجبة أو معدومة، و حينئذ نكون أمام **جدول الحل الأمثل**، و فيه تكون قيم المتغيرات الداخلة في الأساس، تساوي إلى القيم الجديدة الحاصلة في عمود الثوابت على وجه التقابل (العمود الأخير في الجدول)، و بقية المتغيرات تكون معدومة.

أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

مثال : أوجد حل للبرنامج الخطي التالي :

$$\text{Min} \;\; : Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل :

1 - يتم إيجاد الصيغة النموذجية، و تصبح القيود كما يلي :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 6 \\ 6x_1 + x_2 - x_5^e + x_6^a = 6 \\ x_2 - x_7^e + x_8^a = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0, \\ x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0, x_7^e \geq 0, x_8^a \geq 0 \end{cases}$$

كما تصبح الدالة الاقتصادية على النحو التالي :

$$\text{Min} : Z = 10x_1 + 30x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

أو : $\text{Min} : Z = 10x_1 + 30x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a + Mx_8^a$

كما سبقت الإشارة فإن المتغيرات الاصطناعية أخذت المعامل M بإشارة موجبة و يفترض فيه أن يكون كبيرا جدا، و هذا حتى تكون المتغيرات المضروبة فيه و التي هي مجرد متغيرات مساعدة، خارج نظام الحل الأساسي النهائي، لكونها أولى المتغيرات المرشحة للخروج من الأساس لكون معاملاتها كبيرة جدا.

نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية من تشكيلة المعادلات أعلاه :

$$x_4^a = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e$$
$$x_6^a = 6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e$$
$$x_8^a = 2 - x_2 + x_7^e$$

ثم نعوضها في دالة الهدف المحولة :

$$\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2 + M(6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e) + M(6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e) + M(2 - x_2 + x_7^e)$$

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة نجد :

$$\text{Min}: Z = (10 - 9\text{M})x_1 + (30 - 4\text{M})x_2 + \text{M}x_3^e + \text{M}x_5^e + \text{M}x_7^e + 14\text{M}$$

و بجعل دالة الهدف تساوي الصفر، و هي نقطة الانطلاق في إيجاد الحل نجد :

$$(10 - 9\text{M})x_1 + (30 - 4\text{M})x_2 + \text{M}x_3^e + \text{M}x_5^e + \text{M}x_7^e = -14\text{M}$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	**3**	2	-1	1	0	0	0	0	6
x_6^a	**6**	**1**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**6**
x_8^a	**0**	1	0	0	0	0	-1	1	2
ΔZ	$\mathbf{10-9M}$	$30-4M$	M	0	M	0	M	0	$-14M$

على عكس الحال كما هو في حالة التعظيم فإنه في حالة التدنية تكون المتغيرة التي تدخل الأساس هي المقابلة لأصغر قيمة سالبة و هي في مثالنا 10-9M، و بالتالي فالمتغيرة التي تدخل الأساس هي x_1 و يكون عمود عنصر الارتكاز هو العمود الأول.

أما المتغيرة التي تخرج من الأساس فهي المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عمود الثوابت و عمود عنصر الارتكاز هي x_6^a.

و عليه نجري التحويلات اللازمة كما جرى في حالة التعظيم فنحصل على الجدول التالي :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	0	**3/2**	**-1**	**1**	**1/2**	**/**	**0**	**0**	**3**
x_1	1	**1/6**	0	0	-1/6	/	0	0	1
x_8^a	0	**1**	0	0	0	/	-1	1	2
ΔZ	0	$\mathbf{(170-15M)/6}$	M	0	$(10-3M)/6$	/	M	0	$-5M-10$

بما أن المعاملات في السطر الأخير ليست كلها موجبة أو تساوي الصفر، لذلك فالمتغيرة المرشحة للدخول إلى الأساس بأكثر سرعة هي المقابلة للمعامل (170-15M)/6 و بالتالي فهي x_2، و يتحدد بذلك عمود عنصر الارتكاز، أما المتغيرة التي تخرج من الأساس فهي إما x_4^a أو x_8^a لأن كلاهما مقابلان لأقل نسبة بين عمود الثوابت و عمود عنصر الارتكاز، و في هذه الحالة نأخذ واحدة لا على التعيين، و بفرض أن المتغيرة التي تخرج هي x_4^a، و بإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_2	0	1	-2/3	/	1/3	/	0	0	2
x_1	1	0	1/9	/	-2/9	/	0	0	2/3
x_8^a	**0**	**0**	2/3	/	**-1/3**	/	**-1**	**1**	**0=ε**
ΔZ	0	0	$(170-6M)/9$	/	$(3M-70)/9$	/	M	0	-200/3

بنفس المنهجية فإن المتغيرة التي تدخل الأساس هي x_3^e و التي تخرج x_8^a، لاحظ أن قيمة x_8^a المقابلة هي 0 و قد فرضناها ε و هي قيمة بجوار الصفر، و هذا لتسهيل عملية الحسابات، على أن تأخذ قيمتها الحقيقية عند نهاية الحل، و بإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_2	0	1	0	/	0	/	-1	/	2
x_1	1	0	0	/	-1/6	/	1/6	/	2/3
x_3^e	0	0	1	/	-1/2	/	-3/2	/	0
ΔZ	0	0	0	/	5/3	/	85/3	/	-200/3

بما أن كل عناصر السطر الأخير أصبحت موجبة، فنكون بذلك حصلنا على جدول الحل الأمثل و تكون قيم المتغيرات التي تحقق أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي :

$$x_1 = 2/3$$

$$x_2 = 2$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي : **Z=200/3**

و هي نفس النتائج المحصل عليها باستخدام الطريقة البيانية.

يمكن التحقق من مدى احترام القيود بالتعويض في كل قيد كما يلي :

القيد الأول : $3x_1 + 2x_2 \geq 6 \Rightarrow 3\frac{2}{3} + 2 \times 2 = 6$

أي أن القيد محقق تماما، و هو ما يؤكد أن متغيرة الفجوة $x_3{}^e$ تكون قيمتها بالفعل معدومة.

القيد الثاني : $6x_1 + x_2 \geq 6 \Rightarrow 6\frac{2}{3} + 2 = 6$

هو قيد محقق أيضا تماما، و يلاحظ أيضا أن القيد الثالث محقق تماما.

سابعا : عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات :

يمكن أن تكون بعض المتغيرات في المسألة الأولية غير متقيدة بشرط عدم السالبية، غير أن خوارزمية الحل بطريقة السمبليكس تشترط عدم سالبية كل المتغيرات، لذا يجب التحايل رياضيا، بحيث ندخل إلى النظام متغيرات كلها غير سالبة و ذلك وفق المعالجات التالية :

1 – إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر : أي : $x_j \leq 0$

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بفرض : $x_j = -x_j'$

حيث : $x_j' \geq 0$

يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نتبع خوارزمية الحل و نجد الحل الأمثل بشكل عادي، و حينئذ نحول المتغير x_j' إلى أصله وفق التحويل الأولي.

2 - إذا كان أحد المتغيرات حرا : أي يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت في الاتجاه الموجب أو السالب، أي : $x_j \in (-\infty, +\infty)$

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بحيث نفرض :

$$x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$$

حيث : $x_j^{'} \geq 0, x_j^{''} \geq 0$

أي أن x_j عبارة عن الفرق بين قيمتين موجبتين، بحيث :

- إذا كان x_j موجبا يكون : $x_j' > x_j''$

- إذا كان x_j سالبا يكون : $x_j' < x_j''$

- إذا كان x_j معدوما يكون : $x_j' = x_j''$

يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نجد الحل الأمثل، و نقوم بإيجاد قيمة المتغير الأصلي و فق صيغة التحويل أعلاه.

مثال : أوجد الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max} \ : Z = 3x_1 + \ 3x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

بما أن x_2 سالب، لذلك نجري التحويل التالي :

نفرض أن : $x_2 = - x_2'$ حيث: $x_2' > 0$ ، بالتعويض في البرنامج أعلاه نحصل على البرنامج المعدل التالي :

$$\text{Max } : Z = 3x_1 - 3x_2^{'}$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 - 6x_2^{'} \le 10 \\ 2x_1 - 2x_2^{'} \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2^{'} \ge 0 \end{cases}$$

و تكون الصيغة النموذجية للبرنامج كالتالي :

$$\text{Max } : Z = 3x_1 - 3x_2^{'}$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 - 6x_2^{'} + x_3^{e} = 10 \\ 2x_1 - 2x_2^{'} + x_4^{e} = 14 \\ x_1 \ge 0, x_2^{'} \ge 0, x_3^{e} \ge 0, x_4^{e} \ge 0 \end{cases}$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو :

	x_1	$x_2^{'}$	x_3^e	x_4^e	B
x_3^e	**5**	**-6**	**1**	**0**	**10**
x_4^e	2	-2	0	1	14
ΔZ	3	-3	0	0	0

عن طريق خوارزمية السمبليكس نلاحظ أن x_1 مرشحة للدخول إلى الأساس، و x_3^e مرشحة للخروج من الأساس، و عليه يكون جدول الحل الأساسي الثاني على النحو :

	x_1	$x_2^{'}$	x_3^e	x_4^e	B
x_1	1	**-6/5**	1/5	0	2
x_4^e	**0**	**2/5**	**-2/5**	**1**	**10**
ΔZ	0	3/5	-3/5	0	-6

من الجدول أعلاه نجد أن x_2' مرشحة للدخول و x_4^e مرشحة للخروج من الأساس، و عليه يكون جدول الحل الأمثل على النحو :

	x_1	x_2'	x_3^e	x_4^e	B
x_1	1	0	-1	3	32
x_2'	0	1	-1	5/2	25
ΔZ	0	0	0	-3/2	-21

من هذا الجدول نجد :

$$x_1 = 32$$
$$x_2' = 25$$
$$x_3^e = 0$$
$$x_4^e = 0$$

و قيمة الدالة الاقتصادية هي : Z=21

بعد إيجاد جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 على أساس التحويل المفترض مع بداية الحل و هو $x_2' - = x_2$، لذلك فإن :

$$x_2' = 25$$

$$x_2 = -25$$

و حيث أن الدالة الاقتصادية الأصلية هي : $Z = 3x_1 + 3x_2$

بالتعويض نجد : $Z = 3(32) + 3(-25) = \mathbf{21}$

أي أن قيمة الدالة الاقتصادية تبقى هي نفسها بدون تغيير.

مثال : أوجد الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max} \; : Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \forall \end{cases}$$

في هذه الحالة x_2 حر يمكن أن يأخذ أية قيمة مهما كانت موجبة أو سالبة، لذلك نفترض أن هذه المتغيرة عبارة عن الفرق بين متغيرتين كلاهما موجب، أي :

$$x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$$

$$x_2^{'} \geq 0, x_2^{''} \geq 0$$

بالتعويض في البرنامج الأصلي نحصل على البرنامج المعدل التالي :

$$\text{Max} \;: \text{Z} = 3x_1 + \; 10(x_2^{'} - x_2^{''})$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6(x_2^{'} - x_2^{''}) \leq 10 \\ 2x_1 + 7(x_2^{'} - x_2^{''}) \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2^{'} \geq 0, x_2^{''} \geq 0 \end{cases}$$

بفك الأقواس نحصل على البرنامج المعدل التالي :

$$\text{Max} \ : Z = 3x_1 + \ 10x_2^{'} - 10x_2^{''}$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2^{'} - 6x_2^{''} \leq 10 \\ 2x_1 + 7x_2^{'} - 7x_2^{''} \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2^{'} \geq 0, x_2^{''} \geq 0 \end{cases}$$

بإدخال متغيرات الفجوة نحصل على الصيغة النموذجية التالية :

$$\text{Max} \ : Z = 3x_1 + \ 10x_2^{'} - 10x_2^{''}$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2^{'} - 6x_2^{''} + x_3^e = 10 \\ 2x_1 + 7x_2^{'} - 7x_2^{''} + x_4^e = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2^{'} \geq 0, x_2^{''} \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^e \geq 0 \end{cases}$$

و عليه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو :

	x_1	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	x_3^e	x_4^e	B
x_3^e	**5**	**6**	**-6**	**1**	**0**	**10**
x_4^e	2	**7**	-7	0	1	14
ΔZ	3	**10**	-10	0	0	0

و يتم إيجاد الحل بطريقة السمبليكس و هذا ما يظهره الجدول التالي :

	x_1	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	x_3^e	x_4^e	B
$x_2^{'}$	5/6	1	-1	1/6	0	10/6
x_4^e	-23/6	0	0	-7/6	1	7/3
ΔZ	-16/3	0	0	-10/6	0	-50/3

حيث أن الحل الأمثل هو :

$$x_1 = 0$$

$$x_2^{'} = 10/6$$

$$x_2^{''} = 0$$

$$x_3^{e} = 0$$

$$x_4^{e} = 7/3$$

و أعظم قيمة للدالة الاقتصادية هي : **Z=50/3**

بعد إيجاد قيم المتغيرتين x'_2 و x''_2 في جدول الحل الأمثل يتم إيجاد قيمة x_2 و هي عبارة عن الفرق بينهما حسب معادلة التحويل أعلاه و هي : $x_2 = x'_2 - x''_2$ و عليه فإن :

$$x_2 = 10/6 - 0 = 10/6$$

و هي قيمة موجبة هنا، و يمكن أن تكون سالبة فيما لو كانت x''_2 أكبر من x'_2.

ثامنا: حالات أخرى :

أثناء سيرورة الحل قد نصادف عدة حالات خاصة، منها :

1 - انعدام وجود حل أمثل :

في هذه الحالة نصل إلى جدول فيه جميع معاملات دالة الهدف أقل أو تساوي الصفر في حالة التعظيم أو أكبر أو تساوي الصفر في حالة التدنية، لكن متغيرات الأساس تتضمن متغير اصطناعي واحد أو أكثر، و هذا ما يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

2 - عدم محدودية الحل :

و هي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الارتكاز أقل أو تساوي الصفر، حيث يستحيل اختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر الثوابت و عناصر عمود عنصر الارتكاز.

3 – الانحلالية :

نكون أمام حالة الانحلالية عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس، و في الحالتين نختار واحدة لا على التعيين.

شكرا على حسن الإصغاء