Université 8 mai 1945 – GUELMA. ***Année Universitaire 2023/2024***

Faculté des sciences économiques, commerciales et sciences de gestion.

T.C de 1^{er} année L.M.D. ***Série de TD n° 1 (Matrices et Déterminants)***

Exercice 1 :

(i) *Soient la matrice* $A \in M_{3,4}(IR)$ *telle que* $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & 3 \\ 6 & -5 & 7 & -4 \\ -9 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Donner la valeur de chacun des éléments $a_{13},\ a_{31},\ a_{14}, a_{32}, a_{23}, a_{34}, a_{24}, a_{21}, a_{22}, a_{11}, a_{33}$

Ecrire la matrice transposée A^T *de* A *et donner son format.*

(ii) *Donner une matrice* B *dont la transposée est égale à son opposée* $(-B)$ *.*

(iii) *Donnez la matrice* C *telle que pour tout indice* i, j *avec* $1 \le i \le 4$ *et* $1 \le j \le 4$

le terme a_{ij} *soit donné par la formule* $a_{ij} = 3i - 2j$ *, (même question si* $a_{ij} = i \times j + i - j$ *)*

Exercice 2 :

On donne $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$

Trouver x *et* y pour que : 1) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *2)* $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice 3*: Soient les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) *Calculer s'il est possible :* $2A + 3I_3$, $3D - E$, $3E - 2I_2$, $C \pm D$, $E \pm D$, C^2 , D^2 , E^2 , A^2
B^2, $C \times D$, $D \times C$, $C \times B$, $B \times C$, $A \times B$, $B \times A$.

Quelles sont les matrices carrées ? Symétriques? Antisymétriques ?

(ii) *Déterminer les transposées :* A^T , B^T , C^T , $(E + D)^T$, $(C \times B)^T$

Exercice 4*:*

(i) *Calculer la puissance* M^n *et* S^n *avec* $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) *Soient* $a, b \in IR$ *et* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *Trouver toutes les matrices* $B \in M_2(IR)$ *telles que* $AB = BA$

(iii) Calculez et comparez $(A+B)^2$ *et* $(A^2 + 2AB + B^2)$ *avec* $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ où $x \in IR$. Déterminer x pour que $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

(v) *Soit* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = A - I_3$. *Calculer* B^n *pour* $n \in IN$ *, En déduire* A^n

<u>Exercice 5:</u>

Soient les matrices suivantes :

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A_\alpha=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(i) *Montrer sans calcules que :* $\det A_3 = 0$ *et* $\det A_4 = 0$*, Calculer les déterminants de* A_1 , A_2 , A_α

(ii) *Calculer* A_1^{-1} *et* A_2^{-1} *(**méthode de cofacteurs**) Quelle sont les valeurs de* α *pour que* A_α *soit inversible ?*

Calculer A_α^{-1} *dans ce cas. Peut-on calculer l'inverse des matrices* $(A_1 \times A_3)$? *et* $(A_2 \times A_4)$?

(iii) *Trouver le rang de chaque matrice (discuter suivants les valeurs de* α *pour* A_α *).*

(iv) *soit la matrice* $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, *calculer* $A + A^2 + A^3$, En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A, A^2 *et* I_3

(v) *Soient* A *et* B *B deux matrices carrées non nulles a coefficients réels et de même rang. Montrer que si* $A \times B = 0$*, alors* A *et* B *ne sont pas inversibles.*

<u>Exercice 6:</u> *Calculer l'inverse des matrices suivantes en utilisant la méthode du **pivot de gauss***

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fin