

EXERCICE 1. (6 points)(A): Soit $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2x-y}}$

- (1) Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition D_f .
- (2) Indiquer (sans justification) s'il est ouvert, fermé, borné, convexe.
- (3) Calculer $\partial_x f$ et $\partial_y f$.
- (4) Soit $g(x, y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$. Déterminer la courbe de niveau 0 et la courbe de niveau -1 .

(B): Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, a, b, c, d , quatre réels, et g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(x, y) = f(au + bv, cu + dv)$. Calculer Δg à l'aide des dérivées partielles de f . Que se passe-t-il si les vecteurs (a, b) et (c, d) forment une base orthonormée du plan ?

EXERCICE 2. (4 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$.

- (1) Montrer que $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne),
- (2) Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell = 0$ de deux façons :

- (a): d'après la définition (utiliser la norme euclidienne),
- (b): en utilisant les coordonnées polaires.

EXERCICE 3. (A : 5points :note de CC), (B :4points)(A): Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (1) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (utiliser les coordonnées polaires).
 - (2) Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$ existent et les calculer le cas échéant. (il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point).
 - (3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
 - (4) La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?
- (B): Si $(x, y) \neq (0, 0)$ on pose $F(x, y) = f(x, y) - \frac{6}{5} = 0$.
- (1) Montrer que $F(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(2, 1)$
 - (2) Former le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de 2 de la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$.

EXERCICE 4. (6 points)

- (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, supposons que les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues. Rappler les définitions de : **point critique**, **maximum local**, **maximum global** et **point selle**
- (2) Soit $f(x, y) = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$, définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que f admet un seul point critique.
- (3) Déterminer sa nature (point critique)
- (4) On souhaite fabriquer une boîte rectangulaire sans couvercle avec $12m^2$ de carton. On désigne par x, y et z respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte en mètres. Quel est le volume maximal de cette boîte ?

Hint : deux vecteurs $\vec{X}(x_1, x_2), \vec{Y}(y_1, y_2)$ forment une base orthonormée si $\|\vec{X}\| = \|\vec{Y}\| = 1$ et $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0$

EXERCICE 1. (Solution) : A :1+1+1+1, B :1+1(A): Soit $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2x-y}}$ (1) f est définie si $x + y^2 \neq 0$ c'est-à-dire $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{2x > y\}$ (2) D_f est un ouvert (inégalité stricte) non borné et convexe.(3) $\partial_x f(x, y) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2x-y}}}{2x-y} = \frac{-1}{(2x-y)^{3/2}}$ et $\partial_y f(x, y) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2x-y}}}{(2x-y)} = \frac{1}{2(2x-y)^{3/2}}$.(4) $g(x, y) = \frac{x^2+y}{x+y^2} = 0$ implique $x^2 + y = 0 \Rightarrow y = -x^2$, qui représente une parabole d'axe (Ox).

$$g(x, y) = \frac{x^2+y}{x+y^2} = -1 \Leftrightarrow x^2+x+y^2+y = 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

C'est un cercle de centre $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et de rayon $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(B): — On a

$$\partial_u g(u, v) = a\partial_x f(au + bv, cu + dv) + c\partial_y f(au + bv, cu + dv),$$

et

$$\partial_v g(u, v) = b\partial_x f(au + bv, cu + dv) + d\partial_y f(au + bv, cu + dv),$$

— Puis

$$\begin{aligned} \partial_{uu}^2 g(u, v) &= \partial_u(\partial_u g(u, v)) \\ &= a^2 \partial_{xx}^2 f(au + bv, cu + dv) + 2ac \partial_{xy}^2 f(au + bv, cu + dv) + c^2 \partial_{yy}^2 f(au + bv, cu + dv). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \partial_{vv}^2 g(u, v) &= \partial_v(\partial_v g(u, v)) \\ &= b^2 \partial_{xx}^2 f(au + bv, cu + dv) + 2bd \partial_{xy}^2 f(au + bv, cu + dv) + d^2 \partial_{yy}^2 f(au + bv, cu + dv). \end{aligned}$$

— D'où

$$\begin{aligned} \Delta g(u, v) &= \partial_{uu}^2 g(u, v) + \partial_{vv}^2 g(u, v) \\ &= (a^2 + b^2) \partial_{xx}^2 f(au + bv, cu + dv) + 2(ac + bd) \partial_{xy}^2 f(au + bv, cu + dv) \\ &\quad + (c^2 + d^2) \partial_{yy}^2 f(au + bv, cu + dv). \end{aligned}$$

— Si (a, b) et (c, d) forment une base orthonormée, on a alors $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$, d'où $\Delta g(u, v) = \Delta f(au + bv, cu + dv)$.**EXERCICE 2. (Solution) 2+2**(1) Soit $\epsilon > 0$. Il faut trouver $r > 0$, tel que

$$\|(x, y) - (0, 0)\|_2 < r \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \epsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\sqrt{x^2 + y^2} < r \Rightarrow \left| \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon.$$

Comme on a

$$x^2 + y^2 \geq x^2 \Rightarrow \left| \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{6x^2 |y|}{x^2} = 6|y| \leq 6\sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0),$$

il suffit de choisir $r = \frac{\epsilon}{6}$.(2) Posons $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$. On obtient

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0, \forall \theta} (6r \cos^2(\theta) \sin(\theta)).$$

Or,

$$0 \leq |6r \cos^2(\theta) \sin(\theta)| \leq 6r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \theta} 0,$$

donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

EXERCICE 3. (Solution) note de CC. A : 1+2+1+1, B : 2+2

- (1) On étudie la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$. On a

$$\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \theta} 0,$$

car

$$|r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))| \leq 2r^2.$$

On en déduit que la limite de $f(x, y)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ est $0 = f(0, 0)$. La fonction est donc continue en $(0, 0)$. De plus, f est continue sur $(\mathbb{R}^*)^2$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- (2) Attention : il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point $(0, 0)$ n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.
— Calcul de $\partial_x f(0, 0)$:

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$ existe et est égale à 0.

- Calcul de $\partial_y f(0, 0)$:

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$ existe et est égale à 0.

- (3) Ici on doit calculer les dérivées partielles sur le reste du domaine et vérifier si elles sont continues ou non en $(0, 0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.
— Calcul de $\partial_x f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\partial_x \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right) = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On a

$$y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = r \sin(\theta) (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) + 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \theta} 0,$$

car

$$|r \sin(\theta) (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) + 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta))| \leq 6r.$$

On en déduit que la limite de $\partial_x f(x, y)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ est $0 = \partial_x f(0, 0)$. La fonction $\partial_x f$ est donc continue en $(0, 0)$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Calcul de $\partial_y f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\partial_y \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right) = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On a

$$x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = r \cos(\theta) (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\forall \theta} 0,$$

car

$$|r \cos(\theta) (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) - 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta))| \leq 6r.$$

On en déduit que la limite de $\partial_y f(x, y)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ est $0 = \partial_y f(0, 0)$. La fonction $\partial_y f$ est donc continue en $(0, 0)$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On conclut que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- (4) La fonction f est différentiable en $(0, 0)$ car elle est de classe C^1 .

EXERCICE 4.(Solution) 2+1+1+2

- (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, supposons que les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues.
- (a, b) est un **point critique** si $\partial_x f(a, b) = (0, 0)$ et $\partial_y f(a, b) = (0, 0)$
 - Soit $D = \partial_{xx} f \partial_{yy} f |_{(a,b)}$, alors (a, b) est un **maximum local** si $D > 0$ et $\partial_{xx} f(a, b) < 0$. (a, b) est un **minimum local** si $D > 0$ et $\partial_{xx} f(a, b) > 0$.
 - (a, b) est un **point selle** si $D < 0$ et $(\partial_{xx} f(a, b) \geq 0 \text{ or } \partial_{xx} f(a, b) \leq 0)$.
 - Si $D = 0$ on ne peut pas conclure.

- (2) Soit $f(x, y) = \frac{12xy - x^2 y^2}{2(x+y)}$. Points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2}, \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2} \right) = (0, 0).$$

On obtient $(0, 0)$ comme solution directe et $12 - 2xy - x^2 = 0$ et $12 - 2xy - y^2 = 0$. Elles impliquent

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm x.$$

On pose $y = \pm x$ dans l'une ou l'autre des équations et on obtient $12 - 3x^2 = 0$ ou $12 + x^2 = 0$ ce qui donne $x = \pm 2$, et $y = \pm 2$. Donc on a un seul point critique $(2, 2)$.

- (3) Nature du point critique $(2, 2)$:

$$f_{xx}(2, 2) = -1, \quad f_{yy}(2, 2) = -1, \quad f_{xy}(2, 2) = -\frac{1}{2}.$$

Puisque $\det \text{Hess} f(2, 2) = f_{xx}(2, 2) \times f_{yy}(2, 2) - (f_{xy}(2, 2))^2 = \frac{3}{4} > 0$ et $f_{xx}(2, 2) = -1 < 0$, alors $(2, 2)$ est un maximum local.

- (4) On désigne par x , y et z respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte en mètres. Le volume est alors donné par $V = xyz$. Il peut être exprimé en fonction de deux variables x et y seulement en exploitant le fait que l'aire des quatre faces et du fond totalise $12m^2$: $2xz + 2yz + xy = 12$. Pour cela, on résout cette équation par rapport à z : $z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$ et on introduit l'expression de z dans celle de V :

$$V(x, y) = xy \frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2 y^2}{2(x+y)} = f(x, y).$$

Donc le maximum de V est le même que f , alors dans ce cas, $z = 1$ et $V(2, 2) = 4$, le volume maximum est de $4m^3$.