Université 08 Mai 1945 Guelma **Département de Mathématiques**

$2^{\text{ème}}$ année licence Mathématiques **Examen final : Analyse 4**
Le Mercredi 09/06/2021 **Durée 2h00 : 10 :30 - 12 :30**

EXERCICE 1. **(4points : 1.5+1+0.5+1)** On considère la fonction réelle de deux variables f définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y-2x^2}.$$

(1) Déterminer et représenter son ensemble de définition D_f. On admet que cet ensemble est ouvert. Est-il convexe ?
(2) Représenter sur le même dessin que la question 1 les courbes de niveau $f(x,y)=1$, $f(x,y)=-\frac{1}{2}$ et $f(x,y)=0$.
(3) Calculer le gradient de f en tout point de D_f.
(4) Écrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(1,1)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.1)$.

EXERCICE 2. **(6points : 1.5+1.5+1.5+1.5)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

(1) Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$:
  (a): montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. Calculer ∇f pour $(x,y) \neq (1,0)$.
  (b): montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ et que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$?
(2) Étude de la fonction en $(1,0)$:
  (c): montrer que f est continue en $(1,0)$. Calculer le gradient de f en $(1,0)$;
  (d): montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$. f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$?

EXERCICE 3 **(6points : 2+2+2)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}.$$

(a): Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de deux façons :
  (1) d'après la définition,
  (2) en utilisant les coordonnées polaires.
(b): Déterminer les extrema de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = y^2 + xy\ln(x)$.
(c): Montrer que l'équation $g(x,y)=0$ définit implicitement au voisinage de e une fonction réelle de la variable réelle $y = \varphi(x)$ et calculer la tangente au graphe de φ au point $(e, -e)$.

EXERCICE 4 **(4points : 1.5+1+1.5)** Soit D le domaine délimité par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

(1) Représenter le domaine D. Trouver les bornes d'intégration :
  — Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à x.
  — Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à y.
(2) Calculer (directement) $I := \int_D (x-y)dxdy$.
(3) Calculer I au moyen du changement de variables $u=x+y$ et $v=x-y$.

Bon courage à tous. Benrabah.A/R

Université 08 Mai 1945 Guelma **Département de Mathématiques**

$2^{\text{ème}}$ année licence Mathématiques **Examen final : Analyse 4**
Le Mercredi 09/06/2021 **Corrigé type** **Durée 2h00 : 10 :30 - 12 :30**

EXERCICE 1. **(4points : 1.5+1+0.5+1 :Solution)** f est définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y-2x^2}$.

(1) Le domaine de définition de f est $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \neq 2x^2\right\}$.
Cet ensemble n'est pas convexe : il contient les points $A(1,0)$ et $B(-1,0)$ mais pas leur milieu $O(0,0)$.

(2) Représentation des courbes de niveaux : $f(x,y) = 1$, $f(x,y) = -\frac{1}{2}$ et $f(x,y) = 0$.
Soit $(x,y) \in D_f$. On a $(x,y) \in C_1, \quad f(x,y) = 1, \Leftrightarrow x^2 = y - 2x^2 \Leftrightarrow y = 3x^2$. Alors C_1 est donc la courbe d'équation $y = 3x^2$ privée du point $(0,0)$.
On a $(x,y) \in C_{-1/2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y-2x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 0$. Alors $C_{-1/2}$ est donc l'axe des abscisses privé du point $(0,0)$.
On a $(x,y) \in C_0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc C_0 est donc l'axe des ordonnées privé du point $(0,0)$.

(3) On a, pour tout $(x,y) \in D_f$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{2xy}{(y-2x^2)^2}, -\frac{x^2}{(y-2x^2)^2}\right)$$

(4) On a $f(1,1) = -1$ et $\nabla f(1,1) = (2,-1)$. D'où le développement limité à l'ordre 1 de f en $(1,1)$:

$$f(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1) + \varepsilon(x-1,y-1) = -1 + 2(x-1) - (y-1) + \varepsilon(x-1,y-1),$$

avec $\varepsilon(x-1,y-1)_{(x,y)\to(1,1)} \longrightarrow 0$.
En négligeant le terme de reste, on obtient l'approximation

$$f(0.9, 1.1) \simeq -1 + 2(0.9-1) - (1.1-1) = -1.3.$$

EXERCICE 2. **(6points : 1.5+1.5+1.5+1.5 :Solution)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

(1) Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$:

(a): f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\nabla f(x,y) = \left(\partial_x f(x,y) = -y^2 \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}, \partial_y f(x,y) = \frac{2(x-1)^3 y}{((x-1)^2+y^2)^2}\right).$$

(b): f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$. Comme f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

(2) Étude de la fonction en $(1,0)$:

(c): Pour que f soit continue en $(1,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0)$. Passons en coordonnées polaires : $x = 1 + r\cos(\theta), \quad y = 0 + r\sin(\theta)$,

$$\widetilde{f}(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = r\cos(\theta)\sin^2(\theta).$$

Comme

$$|\widetilde{f}(r,\theta)| = |f(x(r,\theta), y(r,\theta))| = |r\cos(\theta)\sin^2(\theta)| \le r \longrightarrow_{r\to 0} 0,$$

alors $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue en $(1,0)$. Le gradient de f en $(1,0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(1,0) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,0) - f(1,0)}{x-1} = 0, \qquad \partial_y f(1,0) = \lim_{x\to 1} \frac{f(0,y) - f(1,0)}{y-0} = 0.$$

(d): Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(1,0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - \partial_x f(1,0)(x-1) - \partial_y f(1,0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}} \neq 0.$$

Notons

$$h(x,y) = \frac{f(x,y) - f(1,0) - \partial_x f(1,0)(x-1) - \partial_y f(1,0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}} = \frac{(x-1)y^2}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}}.$$

comme $h(x, x-1) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(1,0)$. Comme f n'est pas différentiable en $(1,0)$, elle n'est pas de classe C^1 en $(1,0)$.

EXERCICE 3 **(6points : 2+2+2 :Solution)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

(a): Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de deux façons :

(1) Soit $\epsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$, tel que

$$\left|\sqrt{x^2+y^2} - 0\right| < \delta \ \Rightarrow \left|\frac{6x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon.$$

Comme on a

$$x^2 + y^2 \ge x^2 \Longrightarrow \left|\frac{6x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{6x^2|y|}{x^2} = 6|y| \le 6\sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0),$$

il suffit de choisir $\delta = \epsilon/6$.

(2) Posons $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0 \text{ et } \forall\theta} (6r\cos^2(\theta)\sin(\theta)).$$

Or, $0 \le |6r\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \le 6r_{r\to 0} \longrightarrow 0$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(b): Déterminer les extrema de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = y^2 + xy\ln(x)$.
g est de classe C^2 dans son domaine de définition, l'ouvert $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x > 0\}$.
On a $\nabla g(x,y) = (y\ln(x) + y, 2y + x\ln(x))^t = (0,0)^t$, ce qui équivlent à dire

$$\begin{cases} y\ln(x) + y = 0 \\ 2y + x\ln(x) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} (x,y) = (1,0) \text{ ou} \\ (x,y) = (1/e, 1/(2e)). \end{array}$$

Nature des points critiques

$$detHess_g(x,y) = \partial_{xx}g(x,y)\partial_{yy}g(x,y) - (\partial_{xy}g(x,y))^2 = \frac{2y}{x} - (1+\ln(x))^2.$$

Comme $detHess_g(1,0) = -1 < 0$, le point $(1,0)$ est un point-selle ; comme $detHess_g(1/e, 1/(2e)) = 1 > 0$ et $\partial_{xx}g(1/e, 1/(2e)) = 1/2 > 0$, le point $(1/e, 1/(2e))$ est un minimum local.

(c): Montrer que l'équation $g(x,y) = 0$ définit implicitement au voisinage de e une fonction réelle de la variable réelle $y\varphi(x)$ et calculer la tangente au graphe de φ au point $(e, -e)$.

On note que $(e, -e)$ est une solution de l'équation $g(x, y) = 0$. On a

$$\nabla g(x, y) = (y \ln(x) + y, 2y + x \ln(x)).$$

Puisque $\partial_y g(e, -e) = -e \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de e tel que $g(x, \varphi(x)) = 0$.
Equation de la droite tangente On a $\varphi'(e) = -\frac{\partial_x g(e,-e)}{\partial_y g(e,-e)} = -\frac{-2e}{-e} = -2$, donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = e$ est $y + e = -2(x - e) \Leftrightarrow y + 2x - e = 0$.

$\mathcal{EXERCICE}$ 4 **(Solution :4points)** Soit D le domaine délimité par les droites $x = 0,\ \ y = x + 2$ et $y = -x$.

(1) Représenter le domaine D.

Trouver les bornes d'intégration :

— **Par rapport à** x : **lorsque** y varie de $0 \to 1$ x varie de $-y \to 0$ et **lorsque** y varie de $1 \to 2$ x varie de $y - 2 \to 0$.

— **Par rapport à** y : variation de x de $-1 \to 0$ et variation de y de $-x \to x + 2$

(2) Calcul de I

$$\begin{aligned} I = \int_D (x - y)dxdy &= \int_{-1}^{0} \left[\int_{-x}^{x+2} (x - y)dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) |_{-x}^{x+2}\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left(2x^2 + 4x + 2\right) dx \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(3) Calculer I au moyen du changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$:
On obtient $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$, puis

$$|J| = \left| det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}.$$

Si $x = 0$, alors $u + v = 0 \Rightarrow v = -u$,
Si $y = -x \Rightarrow u = 0$, et $y = x + 2 \Rightarrow v = -2$ et $f(x, y) = x - y = v$.

$$\begin{aligned} I = \int_(x - y)dxdy &= \int_\Delta |J| v dv du \\ &= \int_0^2 \left(\int_{-2}^{-u} v dv \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{u^2}{2} - 2 \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{6} - 2u \right]_0^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$
