جامعة 8 ماي 1945 – قالمة

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم العلوم التجارية

السنة الثانية ليسانس : علوم تجارية

” محاضرات مقياس : اساسيات بحوث العمليات”

مسؤول المقياس : أ/ بنية محمد

الوحدة : المنهجية

المعامل : 2

الرصيد : 4

الامتحان النهائي : 60 %

الأعمال الموجهة : 40 %

محتوى البرنامج :

الفصل الأول :- البرمجة الخطية : مفهومها و تطبيقاتها.

الفصل الثاني :- حل البرنامج الخطي بيانيا.

الفصل الثالث :- حل البرنامج الخطي العام " طريقة السمبليكس ".

الفصل الرابع :- الثنائية أو البرنامج المرافق.

الفصل الخامس :- النقل.

الفصل الرابع : الثنائية أو البرنامج المرافق :

لكل برنامج خطي مرتبط بالمتغيرات : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
برنامج ثنائي مرتبط بالمتغيرات : $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ مشتق منه
معرف حسب الحالة كما يلي :

أولا : ثنائية الصيغ القانونية :

إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية :

$$\text{Max} : Z = C'X$$
$$s/c \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي :

$$\text{Min} : Z = B'Y$$
$$s/c \begin{cases} A'Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

فلإيجاد البرنامج الثنائي لأي **برنامج أولي في صيغته القانونية** نتبع الخطوات التالية :

1 - تقلب صيغة دالة الهدف، إذا كانت الصيغة في البرنامج الأولي هي : Min فإنها تتحول إلى Max في البرنامج الثنائي، و إذا كانت الصيغة في البرنامج الأولي هي : Max فإنها تتحول إلى Min في البرنامج الثنائي.

2 - تتعاكس المتراجحات : بحيث ≥ (أقل من أو تساوي) في حالة Max تتحول إلى ≤ (أكبر من أو تساوي)، و ≤ (أكبر من أو تساوي) في حالة Min تتحول إلى ≥ (أقل من أو تساوي).

3 - إذا كانت متغيرات البرنامج الأول هي : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ فإن متغيرات البرنامج الثنائي هي : $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ حيث m هي عدد قيود البرنامج الأولي.

4 - عمود الثوابت في البرنامج الأولي يتحول إلى معاملات متغيرات دالة الهدف في البرنامج الثنائي.

5 - معاملات كل متغيرة في قيود البرنامج الأولي حسب ترتيب القيود، تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الثنائي حسب نفس الترتيب.

6 - معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي، تتحول إلى ثوابت قيود البرنامج الثنائي بنفس الترتيب.

7 - في كلا البرنامجين تكون المتغيرات غير سالبة (ما دام صيغة البرنامج الأولي قانونية).

و تفصيلا إذا كان البرنامج الأولي في شكل الصيغة القانونية التالية :

$$\text{Max} : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

فإن البرنامج الثنائي هو :

$$\text{Min} : \text{Z} = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 \geq c_2 \\ a_{13} y_1 + a_{23} y_2 \geq c_3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي هو بعدد القيود في البرنامج الأولي.

و يلاحظ أيضا أن هذين البرنامجين متناظرين، و يظهر التناظر عموما من خلال الجدول الموالي :

Max Min	x_1	x_2	x_3	…	…	x_n	≤	0
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	…	a_{1n}	≤	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	…	a_{2n}	≤	b_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	…	a_{3n}	≤	b_3
…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	…	a_{mn}	≤	b_m
≥	≥	≥	≥	…	…	≥		
0	c_1	c_2	c_3	…	…	c_n		

8 - في جدول الحل الأمثل تكون العلاقة بين متغيرات البرنامجين كما في الجدول الموالي :

متغيرات الفجوة	المتغيرات الرئيسية	البرنامج الأولي
$x_1^e, x_2^e \dots x_r^e$	$x_1, x_2, x_3, \dots, x_s$	
$y_1, y_2, y_3, \dots, y_r$	$y_1^e, y_2^e \dots y_s^e$	البرنامج الثنائي
متغيرات رئيسية	متغيرات الفجوة	

9 - في جدول الحل الأمثل للبرنامجين نجد :

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة و التي تظهر في السطر الأخير للبرنامج الأولي، تساوي قيم المتغيرات الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي و بالقيمة المطلقة.

- و قيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي.

- قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي و التي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي و التي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، و قيم المتغيرات الحقيقية للبرنامج الثنائي و التي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في البرنامج الأولي و التي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل (بالقيمة المطلقة).

- قيمة الدالة الاقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، و في كلا الحالتين نأخذ قيمتها المطلقة.

مثال : من البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Min} : Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1 - أوجد جدول الحل الأمثل ؟

2 - أوجد البرنامج الثنائي، ثم أوجد جدول حله الأمثل ؟

3 - قارن نتائج الحل في البرنامجين ؟ ماذا تستنتج ؟

الإجابة :

1 - إيجاد الحل الأمثل :

الصيغة النموذجية هي :

$$\text{Min} : Z = 3x_1 + 10x_2 + Mx_4^a + Mx_6^a$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3^e + x_4^a = 10 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_5^e + x_6^a = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^e \geq 0, x_4^a \geq 0, x_5^e \geq 0, x_6^a \geq 0 \end{cases}$$

من الصيغة النموذجية نستنتج :

$$x_4^a = 10 - 5x_1 - x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = 14 + 2x_1 - 7x_2 + x_5^e$$

$$Z = 3x_1 + 10x_2 + M(10 - 5x_1 - x_2 + x_3^e) + M(14 + 2x_1 - 7x_2 + x_5^e)$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

بفك الأقواس و جمع الحدود المتشابهة و جعل Z=0 نجد:

$$(3 - 3M)x_1 + (10 - 8)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e = -24M$$

و عليه يكون جدول الحل الأساسي الأول :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	5	**1**	-1	1	0	0	**10**
$\boldsymbol{x_6^a}$	-2	**7**	0	0	-1	1	**14**
ZΔ	$3 - 3M$	$\mathbf{10 - 8M}$	M	0	M	0	$-24M$

المتغيرة المرشحة للدخول للأساس هي x_2 و المرشحة للخروج من الأساس هي $x_6{}^a$، و عنصر الارتكاز هو 7.

بإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي :

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	B
x_4^a	37/7	0	-1	1	1/7	/	8
x_2	-2/7	1	0	0	-1/7	/	2
ZΔ	$(41-37M)/7$	0	M	0	(10-M)/7	/	$-8M-20$

الحل في الجدول الثاني غير أمثل لأن ليس كل عناصر السطر الأخير أكبر أو تساوي الصفر.

المتغيرة المرشحة للدخول للأساس هي x_1 و المرشحة للخروج من الأساس هي $x_4{}^a$، و عنصر الارتكاز هو 37/7.

بإجراء التحويلات نحصل على الجدول التالي :

متغيرات مساعدة							
	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	**B**
x_1	1	0	-7/37	/	1/37	/	**56/37**
x_2	0	1	-2/37	/	-35/259	/	**90/37**
ZΔ	0	0	41/37	/	47/37	/	**-1068/37**

حل البرنامج الثنائي

كل معاملات الدالة أصبحت موجبة و بالتالي فإن هذا الحل هو حل أمثل :

حيث :

$$x_1 = 56/37$$
$$x_2 = 90/37$$
$$Z = 1068/37$$

2 ـ إيجاد البرنامج الثنائي و حله الأمثل :

أ ـ إيجاد البرنامج الثنائي :

بتطبيق قواعد التحويل فإن البرنامج الثنائي هو :

$$\text{Max} : Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$s/c \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 \leq 3 \\ y_1 + 7y_2 \leq 10 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

ب ـ حل البرنامج الثنائي : الصيغة النموذجية هي :

$$\text{Max} : Z = 10y_1 + 14y_2$$

$$s/c \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 + y_3^e = 3 \\ y_1 + 7y_2 + y_4^e = 10 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3^e \geq 0, y_4^e \geq 0 \end{cases}$$

و منه فإن جدول الحل الأساسي الأول هو :

	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	C
y_3^e	5	**-2**	1	0	**3**
$\boldsymbol{y_4^e}$	1	**7**	0	1	**10**
ZΔ	10	**14**	0	0	**0**

المتغيرة المرشحة للدخول للأساس هي y_2 و المرشحة للخروج من الأساس هي y_4^e، و عنصر الارتكاز هو 7، و جدول الحل الأساسي الثاني هو :

	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	C
$\boldsymbol{y_3^e}$	**37/7**	**0**	**1**	**2/7**	**41/7**
y_2	**1/7**	1	0	1/7	**10/7**
ZΔ	**8**	0	0	-2	**-20**

يلاحظ أيضا أن الحل غير أمثل، المتغيرة المرشحة للدخول للأساس هي y_1 و المرشحة للخروج من الأساس هي y_3^e، و عنصر الارتكاز هو 37/7، و يكون جدول الحل الأمثل هو :

	متغيرات مساعدة				
	y_1	y_2	y_3^e	y_4^e	C
y_1	1	0	7/37	2/37	**41/37**
y_2	0	1	-1/37	35/259	**47/37**
ZΔ	0	0	-56/37	-90/37	**-1068/37**

حل البرنامج الأولي

كل معاملات الدالة أصبحت أقل من أو تساوي الصفر، لذلك فالحل أصبح أمثليا :

حيث :

$$y_1 = 41/37$$
$$y_2 = 47/37$$
$$Z = 1068/37$$

3 ـ المقارنة و الاستنتاج :

من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا :

x_1=56/37 و هي قيمة تقابل y_3^e بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

x_2=90/37 و هي قيمة تقابل y_4^e بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

بقية المتغيرات معدومة.

و إذا ما نضرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن :

x_3^e تقابلها القيمة 41/37، و هي قيمة y_1 في البرنامج الثنائي.

X_5^e تقابلها القيمة 47/37، و هي قيمة y_2 في البرنامج الثنائي.

ملاحظة : إن هذا التقابل يتم على وجه الترتيب، مع اهمال الإشارة السالبة.

كما أن قيمة الدالة الاقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين، و الجدول التالي يوضح ذلك :

الأولي	البـــرنـامج	x_1	x_2	x_3^e	x_5^e	B	
	x_1					56/37 ←	y_3^e
	x_2					90/37 ←	y_4^e
	ΔZ	0	0	41/37	47/37	-1068/37	البرنامج
				↑ y_1	↑ y_2	الثنـــــائـي	

و النتيجة هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، و جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي.

ثانيا : ثنائية الصيغ المختلطة :

في هذه الحالة فإنه يتم إيجاد الثنائية وفق القواعد التالية :

قاعدة (1) : إذا كان القيد في المسألة الأولية من الشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

فإن : المتغير y_i المرافق له في البرنامج الثنائي يكون حرا أي :

$$y_i \in (-\infty, +\infty)$$

و بمعنى آخر مقابل كل متغير فجوة معدوم في قيد البرنامج الأولي، يقابله متغير أساس حر في البرنامج الثنائي.

قاعدة (2) : إذا كان أحد المتغيرات x_i في المسألة الأولية حرا أي :

$$x_i \in (-\infty, +\infty)$$

فإن القيد رقم i المقابل في المسألة الثنائية يكون على الشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = c_i$$

بمعنى آخر مقابل كل متغير أساس حر في المسالة الأولية متغير فجوة معدوم في المسألة الثنائية.

قاعدة (3) : إذا كان القيد في المسألة الأولية - حالة التعظيم - على الشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

يتم تحويله إلى الصيغة القانونية بضرب الطرفين في الإشارة (-) فيصبح القيد على الشكل :

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i$$

ويكون المتغير y_i المرافق في المسألة الثنائية غير سالب، أي : $y_i \geq 0$

نظريات :

نظرية (1) : ثنائية البرنامج الثنائي هي البرنامج الأولي.

نظرية (2) : إذا كان للبرنامج الأولي حل أمثل، فإن قيمة دالة الهدف في البرنامجين تكون متساوية.

نظرية (3) :

- إذا كان للبرنامج الأولي حل لا نهائي، فإن ثنائيته تكون متناقضة.
- إذا كان للبرنامج الأولي حل متناقض، فإن البرنامج الثنائي يكون حله لا نهائي أو متناقض.

مثال (1) :

البرنامج الأولي :

$$\text{Max} : Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + x_2 \leq 14 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الأولي المعدل :

$$\text{Max} : Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + x_2 \leq 14 \\ -3x_1 - x_2 \leq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي :

$$\text{Min} : Z = 6y_1 + 14y_2 - 2y_3$$
$$s/c \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 - 3y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 30 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال (2) :

البرنامج الأولي :

$$\text{Min} : Z = 2x_1 + x_2$$
$$s/c \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq -5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

يحول إلى الصيغة القانونية التالية ثم إلى البرنامج الثنائي :

$$\text{Min} : Z = 2x_1 + x_2$$
$$s/c \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي :

$$\text{Max} : Z = -2y_1 - 2y_2 + 5y_3$$
$$s/c \begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال (3) :

البرنامج الأولي :

$$\text{Min} : Z = -x_1 + 2x_2$$

$$s/c \begin{cases} -5x_1 - 3x_2 \leq 30 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \forall \end{cases}$$

يحول إلى الصيغة القانونية التالية ثم إلى البرنامج الثنائي :

$$\text{Min} : Z = -x_1 + 2x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \forall \end{cases}$$

البرنامج الثنائي :

$$\text{Max} : Z = -30y_1 - 2y_2$$

$$s/c \begin{cases} 5y_1 - y_2 \leq -1 \\ 3y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال (4) :

البرنامج الأولي :

$$Min : Z = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$s/c \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \geq 100 \\ -4x_1 - x_2 - x_4 \geq -50 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \forall, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

يحول إلى الصيغة القانونية التالية ثم إلى البرنامج الثنائي :

$$\text{Max} : Z = 100y_1 - 50y_2 + 20y_3$$

$$s/c \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 9 \\ 5y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ 10y_1 + 7y_3 = 4 \\ y_1 - y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \forall \end{cases}$$

شكرا على حسن الإصغاء