جامعـــــة 8 مـــــاي 1945 قالــــمة

سنـــــة أولـــى جــــــذع مشتــــــرك

كليـة العلـوم الاقتصاديـة والتجاريـة وعلـوم التسـيير

السنــــــــــــة الجامعيــــــــــــة 2024/2023

سلسلة التمارين الثالثة في مقياس إحصاء 2

التمرين رقم 1: صندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و3 كرات بيضاء، نسحب منه في آن واحد كرتين معاً، فإذا افترضنا أن X متغير عشوائي (م. ع.) منفصل يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

I. حدد ما يلي: 1. فراغ الأحداث الأولية؟ 2. قانون التوزيع الاحتمالي لـ م. ع. X 3. تابع التوزيع الاحتمالي لـ م. ع. X؟

II. أحسب احتمال: 1. سحب كرة حمراء على الأكثر؟ 2. سحب كرة بيضاء على الأقل؟

III. بافتراض أن السحب يتم على التوالي دون ارجاع، حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في هذه الحالة؟

التمرين رقم 2: يقوم رجل أعمال بالاستثمار في ثلاثة مشاريع تجارية في مناطق مختلفة (Pr1, Pr2, Pr3) حيث أن احتمال نجاح كل مشروع بعد مدة زمنية هو 0,9. ليكن X متغير عشوائي يُمثل عدد المشروعات الاستثمارية الناجحة.

I. حدد ما يلي: 1. فراغ الأحداث الأولية؟ 2. قانون التوزيع الاحتمالي لـ م. ع. X؟ 3. تابع التوزيع الاحتمالي لـ م. ع. X؟

II. أحسب الاحتمالات التالية: $P(X \leq 1)$ ، $P(X > 2)$ ، $P(1 < X \leq 3)$؟

III. أحسب المميزات العددية التالية: الأمل (التوقع) الرياضي، التباين، والانحراف المعياري؟

IV. بافتراض أن احتمال نجاح المشاريع الثلاثة أصبحت: 0,6 ، 0,8 ، 0,7 تواليا، حدد قانون التوزيع الاحتمالي لـ م. ع. X؟

التمرين رقم 3: ليكن X متغير عشوائي منفصل، قانون توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي:

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	P_1	P_2	P_3	1

I. إذا علمت أن: $E(X) = 1{,}2$ وأن: $V(X) = 0{,}76$ أحسب قيم كل من: P_1، P_2، P_3؟

II. أحسب الاحتمالات التالية: $P(X < 2)$ ، $P(X < 1)$، $P\left(x < 1 / x < 2\right)$؟

III. أحسب بطريقتين كل من: $E(2X-1)$، $V(2X-1)$؟

التمرين رقم 4: I.أثبت أن الدالة التالية هي دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

II. أحسب الاحتمالات التالية: $P(0 < x < 1)$ ، $P(x > 1)$ ، $P(-2 \leq x \leq 2)$؟

III. حدد قيم كل من: الأمل الرياضي، التباين، والانحراف المعياري؟

التمرين رقم 5: (الحل في حصة المحاضرة) ليكن X متغير عشوائي مستمر معرف بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

I. حدد قمية كل من: الأمل الرياضي، التباين، والانحراف المعياري؟

II. عين تابع التوزيع الاحتمالي $F(X)$؟

III. أحسب ما يلي:

$$P(1 < X < 4);\ P\left(|X-1| < \frac{1}{2}\right);\ E(3X+1); V(2X-1)\ ?$$

حل سلسلة التمارين الثالثة في مقياس إحصاء 2

حل التمرين رقم 1:

I.1 تحديد فراغ الأحداث الأولية:

$$X(\Omega) = \{0; \quad 1; \quad 2\}$$

I.2 تحديد قانون التوزيع الاحتمالي لـ X:

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	0,14	0,57	0,29	1
$F(X)$	0,14	0,71	1	$-$

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = 0,14$$
$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = 0,57$$
$$P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = 0,29$$

I.3 تحديد تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X: الاجابة تكون بهذه الطريقة، وضع النتائج في الجدول للتوضيح فقط.

$$F(X) = P(X \le X_i) = \sum_{i=1}^{3} P(X_i) \Leftrightarrow F(X) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ P(x=0) = 0,14 & ; 0 \le x < 1 \\ P(x=0) + P(x=1) = 0,71 & ; 1 \le x < 2 \\ P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 1 & ; x \ge 2 \end{cases}$$

II.1 احتمال سحب كرة حمراء على الأكثر:

$$P(X \le 1) = P(x=0) + P(x=1) = F(1) = 0,71$$

II.2 احتمال سحب كرة بيضاء على الأقل: سحب كرة بيضاء على الأقل معناه سحب كرة حمراء على الأكثر، ومنه الاجابة تكون كما يلي:

$$P(X \le 1) = P(x=0) + P(x=1) = 0,71$$

III. بافتراض أن السحب يتم على التوالي دون ارجاع فان قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في هذه الحالة يكون على الشكل التالي:

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	0,14	0,57	0,29	1

$$P(X=0) = \frac{A_3^2}{A_7^2} = \frac{6}{42} = 0,14$$
$$P(X=1) = \frac{A_3^1 \times A_4^1 + A_4^1 \times A_3^1}{A_7^2} = \frac{24}{42} = 0,57$$
$$P(X=2) = \frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{12}{42} = 0,29$$

حل التمرين رقم 2:

I.1 تحديد فراغ الأحداث الأولية:

$$X(\Omega) = \{0;\quad 1;\quad 2;\quad 3\}$$

I.2 تحديد قانون التوزيع الاحتمالي لـ X:

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	0,001	0,027	0,243	0,729	1
$F(X)$	0,001	0,028	0,271	1	−

$$P(X = 0) = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}001$$

$$P(X = 1) = 3(0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}1) = 0{,}027$$

$$P(X = 2) = 3(0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1) = 0{,}243$$

$$P(X = 3) = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}729$$

I.3 تحديد تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$F(X) = P(X \le X_i\ ) = \sum_{i=1}^{4} P(X_i) \Leftrightarrow F(X) = \begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ 0{,}001 & ; \quad 0 \le x<1 \\ 0{,}028 & ; \quad 1 \le x<2 \\ 0{,}271 & ; \quad 2 \le x<3 \\ 1 & ; \quad x \ge 3 \end{cases}$$

II. حساب الاحتمالات التالية: $P(X \le 1)$ ، $P(X > 2)$، $P(1 < X \le 3)$:

$$P(X \le 1) = F(1) = 0{,}028$$
$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}271 = 0{,}729$$
$$P(1 < X \le 3) = F(3) - F(1) = 1 - 0{,}028 = 0{,}972$$

III. حساب: الأمل الرياضي، التباين، والانحراف المعياري:

1. الأمل الرياضي: $E(X) = \sum XP(X) = 0 \times 0{,}001 + 1 \times 0{,}027 + 2 \times 0{,}243 + 3 \times 0{,}729 = 2{,}7$

2. التباين: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7{,}56 - (2{,}7)^2 = 0{,}27$

$$E(X^2) = \sum X^2P(X) = 0^2 \times 0{,}001 + 1^2 \times 0{,}027 + 2^2 \times 0{,}243 + 3^2 \times 0{,}729 = 7{,}56$$

3. الانحراف المعياري: $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}27} = 0{,}52$

IV. بافتراض أن احتمال نجاح المشاريع الثلاثة أصبح: 0,6 ، 0,8 ، 0,7 تواليا، تحديد قانون التوزيع الاحتمالي لـ م. ع. X

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	0,024	0,188	0,452	0,336	1

$$P(X = 0) = 0{,}4 \times 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}024$$

$$P(X = 1) = 0{,}6 \times 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}188$$

$$P(X = 2) = 0{,}6 \times 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}6 \times 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}452$$

$$P(X = 3) = 0{,}6 \times 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}336$$

حل التمرين رقم 3:

I. تعيين قيم: P_1، P_2، P_3.

$$V(X) = 0{,}76 = E(X^2) - E(X)^2$$
$$\Longrightarrow E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 0{,}76 + (1{,}2)^2 = 2{,}2$$

$$\begin{cases} E(X) = \sum XP(X) = (0)P_1 + (1)P_2 + (2)P_3 = 1{,}2 \Leftrightarrow P_2 + 2P_3 = 1{,}2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ E(X^2) = \sum X^2P(X) = (0)^2P_1 + (1)^2P_2 + (2)^2P_3 = 2{,}2 \Leftrightarrow P_2 + 4P_3 = 2{,}2 \ldots\ldots\ldots (II) \\ \sum P(X) = P_1 + P_2 + P_3 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

بضرب (I) في (-1) وجمعها مع (II) نجد:

$$2P_3 = 1 \Longrightarrow P_3 = 0{,}5$$

بتعويض قيمة P_3 في (I) نجد:

$$P_2 + 2(0{,}5) = 1{,}2 \Longrightarrow P_2 = 0{,}2$$

بتعويض قيمة P_2 و P_3 في (III) نجد:

$$P_1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 1 \Longrightarrow P_1 = 0{,}3$$

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	0,3	0,2	0,5	1

II . حساب الاحتمالات التالية: $P(X < 2)$ ، $P(X < 1)$، $P(x < 1 / x < 2)$

$$P(x < 2) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$$
$$P(x < 1) = P(x = 0) = 0{,}3$$
$$P\left(x < 1 / x < 2\right) = \frac{P[(x < 1) \cap (x < 2)]}{P(x < 2)} = \frac{P(x < 1)}{P(x < 2)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

III.1 حساب $E(2X - 1)$ بطريقتين:

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	0,3	0,2	0,5	1
$XP(X)$	0	0,2	1	1,2
$2X - 1$	-1	1	3	$-$
$(2X - 1)P(X)$	$-0{,}3$	0,2	1,5	1,4

1. $E(2X - 1) = \sum(2X - 1)P(X) = 1{,}4$
2. $E(2X - 1) = 2E(X) - 1 = 2(1{,}2) - 1 = 1{,}4$

III.2 حساب $V(2X - 1)$ بطريقتين:

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	0,3	0,2	0,5	1
X^2	0	1	4	$-$
$E(X^2)$	0	0,2	2	2,2
$2X - 1$	-1	1	3	$-$
$(2X - 1)^2$	1	1	9	$-$
$(2X - 1)^2P(X)$	0,3	0,2	4,5	5

1. $V(2X - 1) = E[(2X - 1)^2] - E(2X - 1)^2 = 5 - (1{,}4)^2 = 3{,}04$
2. $V(2X - 1) = 2^2V(X) = 4[E(X^2) - E(X)^2] = 4[2{,}2 - (1{,}2)^2] = 4(2{,}2 - 1{,}44) = 3{,}04$

حل التمرين رقم 4:

I. نقول بأن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$\forall x \in R, f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الشرط الأول محقق يكفي التحقق من صحة الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1}(0)dx + \int_{1}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)dx + \int_{5}^{+\infty}(0)dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_1^5 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

الشرط محقق ومنه $f(x)$ دالة كثافة احتمالية

II. حساب الاحتمالات التالية:

$$P(0 < x < 1) = \int_{0}^{1}(0)dx = 0$$

$$P(x > 1) = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)dx + \int_{5}^{+\infty}(0)dx = 1$$

$$P(-2 \leq x \leq 2) = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(0)dx + \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{4}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_1^2 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

III. تحديد قيم كل من:

1. الأمل الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x(0)dx + \int_{1}^{5} x\left(\frac{1}{4}\right)dx + \int_{5}^{+\infty} x(0)dx$$

$$E(X) = 0 + \int_{1}^{5}\left(\frac{x}{4}\right)dx + 0 = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^5 = \left(\frac{25}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{24}{8} = 3$$

2. التباين:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x^2(0)dx + \int_{1}^{5} x^2\left(\frac{1}{4}\right)dx + \int_{5}^{+\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2) = 0 + \int_{1}^{5}\left(\frac{x^2}{4}\right)dx + 0 = \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^5 = \left(\frac{125}{12} - \frac{1}{12}\right) = \frac{124}{12} = 10{,}33$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 10{,}33 - (3)^2 = 2{,}33$$

3. الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}33} = 1{,}53$$

حل التمرين رقم 5: الحل في حصة المحاضرة

I. تحديد قيمة الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

1. الأمل الرياضي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x(0)dx+\int_{0}^{2} x\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{+\infty} x(0)dx$$

$$E(X)=0+\int_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx+0=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\left(\frac{8}{6}-0\right)=\frac{4}{3}=1{,}33$$

2. التباين:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx+\int_{0}^{2} x^2\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{+\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2)=0+\int_{0}^{2}\left(\frac{x^3}{2}\right)dx+0=\left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2=2$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}=0{,}22$$

3. الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0{,}47$$

II. تعيين تابع التوزيع الاحتمالي:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0 \quad ; \quad x<0$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\left(\frac{x}{2}\right)dx=0+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^x=\frac{1}{4}x^2 \quad ;0<x<2$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{x} 0dx=0+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2+0=1 \quad ; \quad x>1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{4}x^2 & 0<x<2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

III. حساب ما يلي:

$$P(1<X<4)=F(4)-F(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P\left(|X-1|<\tfrac{1}{2}\right)=P\left(-\tfrac{1}{2}<X-1<\tfrac{1}{2}\right)=P\left(\tfrac{1}{2}<X<\tfrac{3}{2}\right)=F\left(\tfrac{3}{2}\right)-F\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{9}{16}-\tfrac{1}{16}=\tfrac{1}{2}$$

$$E(3X+1)=3E(X)+1=3\times\frac{4}{3}+1=5$$

$$V(2X-1)=2^2V(X)=4\times\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$$