جامعة 8 ماي 1945 – قالمة

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم العلوم التجارية

السنة الثانية ليسانس : علوم تجارية

" محاضرات مقياس : اساسيات بحوث العمليات"

مسؤول المقياس : أ/ بنية محمد

الوحدة : المنهجية

المعامل : 2

الرصيد : 3

الامتحان النهائي : 60 %

الأعمال الموجهة : 40 %

محتوى البرنامج :

الفصل الأول :- البرمجة الخطية : مفهومها و تطبيقاتها.

الفصل الثاني :- حل البرنامج الخطي بيانيا.

الفصل الثالث :- حل البرنامج الخطي العام " طريقة السمبليكس ".

الفصل الرابع :- الثنائية أو البرنامج المرافق.

الفصل الخامس :- النقل.

الفصل الخامس : مسائل النقل ـ تصغير التكاليف ـ

مسائل النقل من إحدى المواضيع الهامة المدرجة في بحوث االعمليات قسم البرمجة الخطية، باعتبارها تهدف أيضا إلى الوصول إلى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية، و على وجه الخصوص تهتم بالبحث عن أقل تكلفة لنقل بضائع شخص طبيعي أو معنوي من مجموعة من المناطق إلى مناطق أخرى و في حدود كميات محددة، أو البحث عن أعلى ربح أو عائد من جراء عملية النقل هذه، لذا فإنها شائعة الاستخدام على مستوى الاقتصاد الجزئي، في المؤسسات الإنتاجية و التجارية و غيرها، و سوف نتطرق في هذا الفصل إلى الحالة الأولى و هي حالة تدنية تكاليف النقل، و نتطرق للحالة الثانية و هي حالة التعظيم لاحقا.

أولا : عرض المسألة :

تعرض مسائل النقل في حالة التدنية و هي الحالة الشائعة بشكل مشابه للافتراض التالي :

- الوحدة (1) تعرض الكمية a_1.
- الوحدة (2) تعرض الكمية a_2.
- الوحدة (3) تعرض الكمية a_3.

و هذا من السلعة التي تنتجها و يفترض أنها متشابهة.

تكلف هذه المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث بتموين أربعة (4) مناطق مختلفة من تلك السلعة، بحيث أن كميات الطلب لكل منطقة هي على الشكل التالي :

- المنطقة (1) الكميات التي تطلبها هي : b_1.
- المنطقة (2) الكميات التي تطلبها هي : b_2.
- المنطقة (3) الكميات التي تطلبها هي : b_3.
- المنطقة (4) الكميات التي تطلبها هي : b_4.

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتوج من وحدة الإنتاج i إلى المنطقة المراد تموينها j محددة محاسبيا و هي c_{ij}، و هي معروضة في الجدول التالي :

	المنطقة (1)	المنطقة (2)	المنطقة (3)	المنطقة (4)
الوحدة (1)	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
الوحدة (2)	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
الوحدة (3)	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

يكون المطلوب هو تموين المناطق الأربعة بكل احتياجاتها من خلال الوحدات الثلاثة، على أن تتحمل المؤسسة أقل تكلفة ممكنة، و في حدود طاقات العرض لكل وحدة من وحدات المؤسسة، و بمعنى آخر يكون الهدف هو الإجابة على السؤال التالي : - ما هي الكميات التي يجب على كل وحدة أن تمون بها كل منطقة مع ضمان حصول كل منطقة على احتياجاتها كاملة، و في حدود الطاقة القصوى المتاحة لكل وحدة إنتاجية، و هذا بشرط أن تتحمل المؤسسة التي تنتمي إليها هذه الوحدات أقل تكلفة ممكنة ؟

فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها الوحدة i المنطقة j هي x_{ij}، فإن الكميات المحتمل توجيهها من كل وحدة إلى كل منطقة هي حسب الجدول التالي :

	المنطقة (1)	المنطقة (2)	المنطقة (3)	المنطقة (4)
الوحدة (1)	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
الوحدة (2)	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
الوحدة (3)	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

و هو جدول مشابه لجدول التكاليف غير أن الفرق هو أن قيم التكاليف من كل وحدة إلى كل منطقة معلومة، غير أن في هذا الجدول الكميات عبارة عن متغيرات مجهولة تبحث عنها إشكالية المسألة.

ثانيا : تشكيل جدول مسائل النقل :

إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال الافتراضي السابق يمكن تلخيصه في جدول شامل، هو **جدول مسألة النقل** و يكون على النحو التالي :

	المنطقة (1)	المنطقة (2)	المنطقة (3)	المنطقة (4)	العرض
الوحدة (1)	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	x_{12} $\boxed{c_{12}}$	x_{13} $\boxed{c_{13}}$	x_{14} $\boxed{c_{14}}$	a_1
الوحدة (2)	x_{21} $\boxed{c_{21}}$	x_{22} $\boxed{c_{22}}$	x_{23} $\boxed{c_{23}}$	x_{24} $\boxed{c_{24}}$	a_2
الوحدة (3)	x_{31} $\boxed{c_{31}}$	x_{32} $\boxed{c_{32}}$	x_{33} $\boxed{c_{33}}$	x_{34} $\boxed{c_{34}}$	a_3
الطلب	b_1	b_2	b_3	b_4	المجموع

إن هذا الجدول يلخص كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل منطقة في أعلى كل خانة.

و تظهر متغيرات المسألة و هي القيم x_{ij} المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة و كذا كميات الطلب لكل منطقة.

تسمى الوحدات الإنتاجية **بالمنبع** كما تسمى المناطق المراد تموينها **بالمصب**، و عليه فإن القيمة c_{ij} نقول عنها بأنها تكلفة الوحدة الواحدة المنقولة من المنبع i إلى المصب j و هي قيمة **غير سالبة**، و x_{ij} هي الكميات المراد نقلها من المنبع i إلى المصب j و هي أيضا قيمة **غير سالبة**.

ثالثا : الصيغة الرياضية لمسألة النقل :

من الجدول السابق تظهر لنا الكميات المراد نقلها من كل منبع إلى كل مصب، و كذا تكلفة الوحدة الواحدة من كل منبع إلى كل مصب، و عليه فإن :

التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث هي :

$$Z = \boldsymbol{c_{11}} x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34}$$

و اختصارا تكتب كما يلي :

$$Z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

الكميات التي يعرضها كل منبع هي :

المنبع (1) : $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1$

المنبع (2) : $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2$

المنبع (3) : $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3$

و اختصارا الكميات التي يعرضها كل منبع هي :

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i$$

و يعني هذا أن الكميات المرسلة من كل منبع إلى مختلف المصبات، يجب أن تساوي قدرة العرض لكل منبع.

الكميات المطلوبة في كل مصب هي :

المصب (1) : $x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$

المصب (2) : $x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$

المصب (3) : $x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$

المصب (4) : $x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4$

و اختصارا الكميات المطلوبة في كل مصب هي :

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j$$

و يعني هذا أن الكميات المستقبلة من طرف كل مصب من كل منبع يجب أن تساوي طلب كل مصب.

و بما أن الهدف هو تدنية التكاليف في ظل هذه الشروط، لذلك فإن

الصياغة الرياضية لمسألة النقل حسب الافتراض السابق تكون كما يلي :

$$Min : Z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j \\ x_{ij} \geq 0 \\ c_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

و عموما تكون :

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$
$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

حيث : n عدد المصبات و m عدد المنابع.

مثال : تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المناطق الشمالية للوطن بمنتوجاتها من المياه المعدنية، عن طريق وحداتها الثلاث الأكثر شهرة و هي :

- وحدة موزاية، تنتج قارورات المياه المسماة " موزاية " بطاقة قصوى هي 55.10^3 قارورة شهريا.
- وحدة سعيدة، تنتج قارورات المياه المسماة " سعيدة " بطاقة قصوى هي 45.10^3 قارورة شهريا.
- وحدة باتنة، تنتج قارورات المياه المسماة " باتنة " بطاقة قصوى هي 20.10^3 قارورة شهريا.

يتم التسويق في اتجاه النواحي الشمالية الثلاث و هي :

- الناحية الغربية مقرها وهران، تقدر كميات طلبها بـ 10.50^{3} قارورة شهريا.

- الناحية الشرقية مقرها قسنطينة، تقدر كميات طلبها بـ 10.30^{3} قارورة شهريا.

- الناحية الوسطى مقرها البليدة، تقدر كميات طلبها بـ 10.40^{3} قارورة شهريا.

دراسات المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة القارورة الواحدة المنقولة من كل وحدة إنتاج إلى كل مقر ناحية من النواحي، هي بالدينار كما يلي :

مصب / منبع	الوسط	الشرق	الغرب
موزاية	1	4	**5**
سعيدة	5	7	**3**
باتنة	10	8	**9**

تبحث المؤسسة عن خطة لتموين مختلف النواحي بمنتوجاتها بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب :

1 - أثبت أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل ؟

2 - شكل جدول المسألة ؟

الإجابة :

1/ - إثبات أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل :

* هدف المؤسسة هو إيجاد الكميات الواجب توجيهها من كل منبع إلى كل مصب، بغية تدنية التكاليف الكلية التي تتحملها المؤسسة، و بالتالي فإنه توجد دالة هدف هي على الشكل التالي :

$$Min : Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

* مجموع الطلب يساوي مجموع العرض :

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 55 + 45 + 20 = 120$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 50 + 40 + 30 = 120$$

يعني هذا أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب.
كميات العرض و كميات الطلب غير سالبة.
و عليه يمكن القول بأن هذه المسألة تخضع لنوع مسائل النقل.

2/ - **تشكيل جدول المسألة :** يمكن إجمال معطيات المسألة في الجدول التالي :

مصب / منبع	الوسط	الشرق	الغرب	العرض (10^3 قا)
موزاية	$\boxed{1}$ x_{11}	$\boxed{4}$ x_{12}	$\boxed{5}$ x_{13}	55
سعيدة	$\boxed{5}$ x_{21}	$\boxed{7}$ x_{22}	$\boxed{3}$ x_{23}	45
باتنة	$\boxed{10}$ x_{31}	$\boxed{8}$ x_{32}	$\boxed{9}$ x_{33}	20
الطلب (10^3 قا)	40	30	50	120

رابعا : طرق حل مسائل النقل :

تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين :

الأولى : هي مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول : و تتم بعدة طرق منها : طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا، طريقة فوجل.

الثانية : و هي مرحلة اختبار الحل و سيرورة تحسينه : و تتم بإحدى الطريقتين، الأولى تعرف بطريقة التخطي (Stepping- stone)، و الثانية تعرف بطريقة التوزيع المعدل (MODI).

1/ - طريقة الزاوية الشمالية الغربية- La méthode du coin Nord-Ouest :

يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أول خانة في الجدول إلى الأعلى و إلى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول، و يتم ذلك باتباع منهجية المثال التالي :

مثال : أوجد حل المثال السابق بطريق الزاوية الشمالية الغربية - أسلوب التخطي.

الإجابة :

يتم توزيع الكميات من مختلف المنابع إلى مختلف المصبات كما يلي :

أ - نبدأ بأول خلية في الجدول و هي الخلية العلوية اليسرى " الشمالية الغربية "، المقابلة لـ منبع 1 مصب 1، نجد أن احتياجات المصب 1 هي 40 ألف وحدة، بينما حجم ما يعرضه المنبع 1 هو 55 ألف وحدة، لذلك فيمكن لهذا المصب أن يحصل على كامل احتياجاته المقدرة بـ 40 ألف وحدة من المنبع 1 و يتشبع بذلك العمود الأول كلية، بينما يتبقى للمنبع 1 كمية تقدر بـ 15 ألف وحدة، نتابع التوزيع من خلال الجدول الموالي :

ب - ننتقل إلى الخلية المقابلة لـ منبع 1 مصب 2، مقابلها نجد كمية عرض تقدر بـ 15 ألف وحدة و هي المقدار المتبقي بعد تسويق المنبع 1 لجزء من معروضه إلى المصب 1، بينما احتياجات المصب 2 تقدر بـ 30 ألف وحدة.

لذلك فإن أقصى كمية يمكن توجيهها من المنبع 1 إلى المصب 2 هي 15 ألف وحدة، و حينئذ تتبقى احتياجات مقدارها 15 ألف وحدة، ينبغي على المصب 2 أن يتحصل عليها من منبع آخر و هذا في الوقت الذي يستنفذ فيه المنبع 1 كل الكميات التي كان يعرضها.

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	باقي	باقي
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55	15	0
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 15	$\boxed{3}$ 30	45	30	0
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 20	20	0	
b_j	40	30	50	120		
باقي	0	15	20			
باقي		0	0			

ج - ننتقل إلى خلية أخرى، الخلية (1، 3) لا يمكن الانتقال إليها لأنه لا يوجد للمنبع 1 ما يسوقه، الخلية (2، 1) لا يمكن الانتقال إليها لأن المصب 1 لبيت كل احتياجاته، و الخلية المرشحة الآن هي الخلية المقابلة لـ منبع 2 مصب 2، حيث أن طاقة العرض هي 45 ألف وحدة بينما الطلب غير الملبى لحد الآن، للمصب 2 هو 15 ألف وحدة و هي كمية يمكن تلبيتها من المنبع 2 و يتبقى له بعد ذلك 30 ألف وحدة، و يتشبع المصب 2 كلية.

د - ننتقل بعد ذلك إلى الخلية الموالية و هي الخلية المقابلة لـ منبع 2 مصب 3، حيث قيمة العرض المتبقى هي 30 ألف وحدة بينما قيمة الطلب هي 50 ألف وحدة، لذلك فأكبر كمية يمكن الحصول عليها من المنبع 2 هي 30 ألف وحدة و تبقى قيمة طلب مقدارها 20 ألف وحدة، في حين يكون المنبع 2 قد سوق كل ما كان يعرضه.

هـ ـ ننتقل إلى الخلية (3، 1) حيث لا يمكن للمصب 3 أن يسوق إليها لأن احتياجاتها لبيت كلية، الخلية (3، 2) أيضا لا يمكن للمنبع 3 أن يسوق إليها شيئا لأن احتياجاتها لبيت كلية، و تتبقى بالتالي الخلية المقابلة لـ منبع 3 مصب 3، حيث أن الكميات المعروضة هي 20 ألف وحدة بينما كميات الطلب المتبقى للمصب 3 هي أيضا 20 ألف وحدة، و بذلك يتم تلبية كل احتياجات المصب 3 و في نفس الوقت يتم تسويق كل عرض المنبع 3، و تكون كل الكميات المعروضة للمؤسسة قد سوقت، و لبيت كل احتياجات الجهات الثلاث.

و نحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول و هو الجدول الموالي و فيه نجد :

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 15	$\boxed{3}$ 30	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 20	20
b_j	40	30	50	120

$x_{11}=40$ و تعني أن منبع 1 (موزاية) يمون ناحية الوسط بـ 40 ألف وحدة شهريا.

$x_{12}=$ 15 و تعني أن منبع 1 (موزاية) يمون ناحية الشرق بـ 15 ألف وحدة شهريا.

$x_{22}=$ 15 و تعني أن منبع 2 (سعيدة) يمون ناحية الشرق بـ 15 ألف وحدة شهريا.

$x_{23}=30$ و تعني أن منبع 2 (سعيدة) يمون ناحية الغرب بـ 30 ألف وحدة شهريا.

$x_{33}= 20$ و تعني أن منبع 3 (باتنة) يمون ناحية الغرب بـ 20 ألف وحدة شهريا.

و بقية المتغيرات قيمها معدومة أي : $x_{13}= x_{21}= x_{31}= x_{32}=0$

أما التكلفة التي تتحملها المؤسسة فهي :

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} =$$

$$= 1 \times 40 + 4 \times 15 + 7 \times 15 + 3 \times 30 + 9 \times 20 = 475$$

و تجدر الإشارة إلى أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي هو :

m+n-1

حيث : m عدد المنابع (الأسطر)، nعدد المصبات (الأعمدة).

و هي القاعدة الأساسية التي ينبغي توفرها لأجل سيرورة إيجاد الحل الأمثل.

و بالنضر إلى مثالنا فإن عدد المتغيرات الداخلة في الحل يجب أن تساوي : 3+3-1=5.

و هو بالفعل عدد المتغيرات الداخلة في الحل كما يعرضه الجدول السابق.

2/ ـ سيرورة الحل الأمثل :

إن الحل المتوصل إليه هو **أول حل أساسي** لكننا لا نعلم إذا كان حلا أمثلا أم هو غير أمثل، لمعرفة ذلك فإن هناك طريقتين مستعملتين كما تم الإشارة إلى ذلك من قبل، الأولى هي طريقة التخطي (-Stepping stone) أما الثانية فهي معروفة بطريقة التوزيع المعدل (MODI).

أ ـ طريقة التخطي (Stepping- stone) :

فكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخلايا غير الداخلة في الحل و التي من شأنها أن تدني التكلفة الكلية في حالة إدخالها إلى الحل

الأساسي، لذا ينبغي اختبار الخلايا غير الداخلة في الحل إذا ما كان إمرار أي وحدة عبرها يؤدي إلى خفض التكاليف، أي ينبغي إيجاد ما نصطلح عليه **بالتكاليف الحدية** (تكاليف الوحدة الواحدة) لكل خلية غير داخلة في الحل، و ذلك كما في منهجية حل المثال السابق على النحو التالي :

- **الخلية (1، 3) :** هي خلية غير داخلة في الحل، إذا أمررنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي إلى اختلال شروط توازن المسألة و منها :

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i$$

على مستوى السطر الأول، لأن مجموع السطر الأول يصبح 56 بدلا من 55، و :

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j$$

على مستوى العمود الثالث، لأن مجموع العمود الثالث يصبح 51 بدلا من 50، لذلك ينبغي طرح القيمة (1) من الخلية (2، 3)، غير أن طرح هذه القيمة أيضا يحدث اختلالا على مستوى السطر الثاني لأن المجموع يصبح 44 بدلا من 45، نضيف القيمة (1) إلى الخلية (2، 2) غير أن ذلك أيضا يحدث اختلالا على مستوى العمود 2 فيصبح مجموعه 31 بدلا من 30، و عليه ينبغي طرح القيمة (1) من الخلية (1، 2)، و بهذا يحصل التوازن في المسألة، و الخلاصة أننا نضيف و نطرح المقدار (1) على مدار اتجاه المسار كما هو موضح في الجدول أدناه :

إذا رمزنا لتكلفة الوحدة الواحدة المنقولة من المنبع i إلى المصب j بـ σ_{ij}، فإن تكلفة نقل وحدة واحدة من المنبع 1 إلى المصب 3 هي :

$$\sigma_{13} = 5(1) + 3(-1) + 7(1) + 4(-1) = 5$$

و يعني أن هذه الخلية لو تدخل في الحل الأساسي فإن كل وحدة منقولة من المنبع 1 إلى المصب 3 سترفع التكلفة الكلية بـ 5 وحدات نقدية، فإذا تم نقل 10 وحدات مثلا من المنبع 1 إلى المصب 3 فإن ذلك

سيرفع التكلفة الإجمالية بمقدار 50 وحدة نقدية، و عليه فإن هذه الخلية ينبغي تجنبها.

- **الخلية (2، 1) :** هي خلية غير داخلة في الأساس، إذا أمررنا وحدة واحدة عبرها فإن ذلك يؤدي إلى اختلال شروط توازن المسألة على مستوى السطر الثاني و على مستوى العمود الأول، لأن مجموع السطر الثاني يصبح 46 و مجموع العمود الأول يصبح 41، لذلك ينبغي طرح القيمة (1) من الخلية (1، 1) غير أن طرح هذه القيمة أيضا يحدث اختلالا على مستوى السطر الأول لأن المجموع يصبح 54 بدلا من 55، لذلك نضيف القيمة (1) إلى الخلية (1، 2) غير أن ذلك أيضا يحدث اختلالا على مستوى العمود 2 فيصبح مجموعه 31 بدلا من 30، و عليه ينبغي طرح القيمة (1) من الخلية (2، 2)، و بهذا يحصل التوازن في المسألة، و الخلاصة هي أيضا نضيف و نطرح المقدار (1) على مدار اتجاه المسار، كما هو موضح في الجدول أدناه :

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40 -1	$\boxed{4}$ +1 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$ +1	$\boxed{7}$ -1 15	$\boxed{3}$ 30	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 20	20
b_j	40	30	50	120

و عليه تصبح تكلفة نقل وحدة و احدة من المنبع 2 إلى المصب 1 هي :

$$\sigma_{21} = 5(1) + 1(-1) + 4(1) + 7(-1) = 1$$

و يعني هذا أيضا أن كل وحدة منقولة من المنبع 2 إلى المصب 1 ستزيد التكلفة بوحدة نقدية واحدة، فإمرار 10 وحدات مثلا سيزيد التكلفة بـ 10 وحدات نقدية (10×1).

و بالمثل يتم حساب التكاليف الحدية للخلايا الأخرى.

- الخلية (3، 1) : بالمثل يتم إيجاد المسار بالنسبة لهذه الخلية، و ينبغي أيضا الحفاظ على التوازن سطريا و عموديا، و يلاحظ أن المسار هنا أطول، و هذا ما يتطلبه شرط الحفاظ على التوازن، نلاحظ أنه عندما أضفنا الكمية (1) في الخلية (3، 1) لم نقم بطرحها من الخلية (2، 1) للحفاظ على التوازن، لأن هذا يجعل x_{21} سالب و هو ما يتعارض مع شروط مسائل النقل التي يفترض فيها أن المتغيرات لا تأخذ قيما سالبة، و هذا ما جعلنا نطرح القيمة (1) من الخلية (1، 1)، و بالمثل بالنسبة للبقية، نضيف و نطرح مع الحفاظ على التوازن أفقيا و عموديا، مع الحرص على عدم سالبية المتغيرات، كما هو موضح في الجدول أدناه :

و عليه فإن التكلفة الحدية لهذا المسار هي :

$$\sigma_{31} = 10(1) + 1(-1) + 4(1) + 7(-1) + 3(1) + 9(-1) = 0$$

يعني هذا أن هذه الخلية لا تؤثر على التكلفة في حالة إدخالها إلى الأساس، إذ أنها لا تنقص منها و لا تزيد فيها.

- **الخلية (3، 2) :** بنفس الطريقة تماما نجد أن التكلفة الحدية للمسار المتولد عن هذه الخلية هو :

$$\sigma_{32} = 8(1) + 7(-1) + 3(1) + 9(-1) = -5$$

و يعني هذا أن نقل كل وحدة من المنبع 3 إلى المصب 2 يؤدي إلى خفض التكاليف الإجمالية بـ 5 وحدات نقدية، فنقل 15 وحدة مثلا من المنبع 3 إلى المصب 2 سيؤدي إلى خفض التكاليف الإجمالية بـ 75 وحدة نقدية، أي أن التكلفة الإجمالية تصبح 400 بدلا من 475 وحدة نقدية.

بإجمال التكاليف الحدية المحصل عليها و هي :

$$\sigma_{32} = -5, \sigma_{31} = 0, \sigma_{21} = 1, \sigma_{13} = 5$$

نجد أن الخلية التي تعطي تخفيضا للتكلفة الإجمالية هي الخلية (3، 2)، لذلك نقول أن الحل الأساسي الأول هو غير أمثل، **و عموما نقول أن الحل غير أمثل إذا كانت إحدى أو بعض التكاليف الحدية سالبة**، و الخلية المرشحة للدخول إلى الأساس هي المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة.

و عليه فالحل الأساسي الأول يتطلب الأمر تحسينه بإدخال الخلية (3، 2) إلى الأساس، فكيف يتم ذلك ؟

يتم ذلك بإحداث تغييرات على طول قيم المتغيرات المتواجدة على زوايا المسار بإضافة و طرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا السالبة (الزوايا التي تم طرح القيمة 1 منها)، و هذا لتجنب احداث قيم سالبة لبعض المتغيرات.

في مثالنا القيم المتواجدة في الزوايا السالبة هي : $x_{21}=15$ و $x_{33}=20$، لذلك المتغيرة التي تخرج من الأساس هي x_{21} حيث يجب أن تتحول إلى قيمة معدومة كما في الجدول الموالي :

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 15^{-15}	$\boxed{3}$ +15 30	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ +15	$\boxed{9}$ -15 20	20
b_j	40	30	50	120

بإجراء عملية الجمع في الخلايا التي حصل فيها تغيير نحصل على جدول الحل الأساسي الثاني، كما هو موضح في الجدول الموالي :

و يصبح مخطط التموين الجديد كما يلي :

$x_{11}=40$ أي أن المنبع الأول يمون المصب الأول بـ 40 ألف وحدة.

$x_{12}=15$ أي أن المنبع الأول يمون المصب الثاني بـ 15 ألف وحدة.

$x_{23}=45$ أي أن المنبع الثاني يمون المصب الثالث بـ 45 ألف وحدة.

$x_{32}=15$ أي أن المنبع الثالث يمون المصب الثاني بـ 15 ألف وحدة.

$x_{33}=5$ أي أن المنبع الثالث يمون المصب الثالث بـ 5 ألاف وحدة.

أما بقية المتغيرات فهي معدومة.
بما أننا وجدنا التكلفة الحدية للخلية التي دخلت الحل هي 5-= σ_{32}
لذلك فإن التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة وفق المخطط الجديد سوف تتخفض بمقدار $15 \times \sigma_{32}$ أي بمقدار 75 ألف وحدة نقدية.
و عليه فعند حساب تكلفة النقل الإجمالية يجب أن نجدها تساوي 400 ألف وحدة نقدية لأن التكلفة في الحل الأساسي الأول هي 475 ألف وحدة نقدية، و لنرى إذا كان هذا صحيحا :

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij} =$$

$$= 1 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 45 + 8 \times 15 + 5 \times 9 = 400$$

و عليه فإن التكلفة الجديدة تساوي بالفعل 400 ألف وحدة نقدية.

و علينا أن نختبر من جديد الحل المتوصل إليه إذا كان أمثليا أم لا زال قابلا للتحسين و هذا باستعمال نفس الطريقة السابقة، أي إيجاد التكاليف الحدية للخلايا الفارغة و التي تظهر مساراتها في الجدول الموالي :

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 45	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20
b_j	40	30	50	120

أما قيم التكاليف الحدية فهي :

$$\sigma_{13} = 5 - 9 + 8 - 4 = 0$$
$$\sigma_{21} = 5 - 1 + 4 - 8 + 9 - 3 = 6$$
$$\sigma_{22} = 7 - 3 + 9 - 8 = 5$$
$$\sigma_{31} = 10 - 1 + 4 - 8 = 5$$

بما أن كل التكاليف الحدية σ_{ij} أصبحت غير سالبة لذلك نقول أن جدول الحل الأساسي الثاني هو جدول الحل الأمثل، و عليه فإن خطة النقل التي يجب على المؤسسة أن تطبقها هي التالية :

أ ـ وحدة موزاية تمون :

- منطقة الوسط بـ 40 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 40 ألف دينار.
- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 60 ألف دينار.

ب ـ وحدة سعيدة تمون :

- منطقة الغرب بـ 45 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 135 ألف دينار.

ج ـ وحدة باتنة تمون :

ـ منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 120 ألف دينار.

ـ منطقة الغرب بـ 5 ألاف وحدة بتكلفة تقدر بـ 45 ألف دينار.

و تتحمل مؤسسة المياه المعدنية المالكة للثلاث وحدات أدنى تكلفة تموين و هي 400 ألف دينار خلال الفترة.

ب ـ طريقة التوزيع المعدل (MODI) :

فكرة هذه الطريقة هي نفسها فكرة طريقة التخطي، غير أن الاختلاف في المنهجية إذ أن هذه الطريقة تفترض وجود مجهولين هما V_j و يعبر عن الأعمدة و U_i و يعبر عن الصفوف، حيث أن حاصل جمعهما بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل يجب أن يساوي تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر تلك الخلايا، أي إذا كانت تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنبع i إلى المصب j وهي c_{ij} فيجب أن يكون :

$$U_i + V_j = c_{ij}$$

حيث i يرمز للصف الذي توجد فيه الخلية و j يرمز للعمود الذي توجد فيه الخلية، و هذا بالنسبة لكل الخلايا الداخلة في الحل، ثم يتم إيجاد المجاهيل U_i و V_j و هذه هي الخطوة الأولى، تليها الخطوة الثانية و هي إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل الأساسي، و ذلك عن طريق المعادلة :

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$$

و هنا يبدأ التشابه مع الطريقة الأولى إذ أن القيم σ_{ij} التي نحصل عليها مساوية تماما لتلك التي نحصل عليها بطريقة التخطي، و تكون الخلايا ذات الامتياز و التي من شأنها أن تدخل الحل و التي تحسن من التكلفة هي التي تأخذ تكلفتها الحدية أقل قيمة في الاتجاه السالب، و حينها يتم تحديد المسار و إجراء التغييرات تماما كما في الطريقة الأولى، و سنحاول أن نشرح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال : باتباع أسلوب **التوزيع المعدل** أوجد الحل الأمثل لمسألة التمرين السابق و ذلك باعتماد طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

إن طريقة الزاوية الشمالية الغربية المطبقة على المثال أعطتنا جدول الحل الأساسي الأول، و الذي يصبح كما يلي :

		V_1	V_2	V_3	
		مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
U_1	منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
U_2	منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 15	$\boxed{3}$ 30	45
U_3	منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 20	20
	b_j	40	30	50	120

بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل : لدينا :

$$U_i + V_j = c_{ij}$$

من خلالها يمكن إيجاد المجاهيل U_i و V_j من خلال المعادلات التالية، مع فرض أن U_i لأول معادلة قيمتها صفر و هذا لتسهيل الحل :

الخلية (1، 1) : $U_1+V_1=1 \Rightarrow V_1=1$

الخلية (1، 2) : $U_1+V_2=4 \Rightarrow V_2=4$

الخلية (2، 2) : $U_2+V_2=7 \Rightarrow U_2+4=7 \Rightarrow U_2=3$

الخلية (2، 3) : $U_2+V_3=3 \Rightarrow 3+V_3=3 \Rightarrow V_3=0$

الخلية (3، 3) : $U_3+V_3=9 \Rightarrow U_3+0=9 \Rightarrow U_3=9$

بالنسبة للخلايا غير الداخلة في الحل : و هي الخطوة الثانية، يتعين تقييم هذه الخلايا من خلال إيجاد التكاليف الحدية لكن بطريقة مختلفة عن طريقة التخطي، و ذلك عن طريق المعادلة :

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - U_i - V_j$$

و التي نحصل من خلالها على الجدول التالي :

الخلية	$\sigma_{ij}=c_{ij}-U_i-V_j$	σ_{ij}
U_1, V_3	5-0-0=5	**5**
U_2, V_1	5-3-1=1	**1**
U_3, V_1	10-9-1=0	**0**
U_3, V_2	8-9-4=-5	**-5**

يظهر في العمود الأخير أن التكاليف الحدية مساوية تماما لتلك المحصل عليها بطريقة التخطي، و يظهر أن الحل غير أمثل، لأن الخلية (3، 2) سوف تؤدي إلى تحسين التكلفة بمقدار 5 وحدات نقدية لكل وحدة تنقل عبرها أي من المنبع 3 إلى المصب 2، و عليه يتم تحديد المسار و إجراء التحويلات بنفس الطريقة المشروحة و نحصل على الجدول الموالي :

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 45	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20
b_j	40	30	50	120

من جديد نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، و هذا بنفس المنهجية السابقة حيث نفرض أيضا أن $U_1=0$ و نحصل على النتائج :

الخلية (1، 1) : $U_1+V_1=1 \Rightarrow V_1=1$

الخلية (1، 2) : $U_1+V_2=4 \Rightarrow V_2=4$

الخلية (3، 2) : $U_3+V_2=8 \Rightarrow U_3+4=8 \Rightarrow U_3=4$

الخلية (3، 3) : $U_3+V_3=9 \Rightarrow 4+V_3=9 \Rightarrow V_3=5$

الخلية (2، 3) : $U_2+V_3=3 \Rightarrow U_2+5=3 \Rightarrow U_2=-2$

و في الخطوة الموالية نشكل جدول التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل، و هو ما يظهره الجدول الموالي :

الخلية	$\sigma_{ij}=c_{ij}-U_i-V_j$	σ_{ij}
U_1, V_3	5-0-5=0	**0**
U_2, V_1	5-(-2)-1=6	**6**
U_2, V_2	7-(-2)-4=5	**5**
U_3, V_1	10-4-1=5	**5**

بما أن كل قيم σ_{ij} غير سالبة، لذلك فإن جدول الحل الأساسي السابق هو جدول الحل الأمثل، و يتم شرحه تماما كما تم ذلك عند شرح جدول الحل الأمثل المحصل عليه بطريقة التخطي.

3 ـ طريقة التكلفة الدنيا- La méthode du coût minimum:

تختلف هذه الطريقة عن الطريقة الأولى في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ في تشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم **التكلفة المساوية أو الموالية** و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض و الطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي m+n-1، ثم يتم بعد ذلك اختبار ما إذا كان الحل أمثلا أم لا بنفس طريقة سيرورة الحل كما عرضت في طريقة الزاوية الشمالية الغربية (طريقتي : التخطي أو التوزيع المعدل)، و يتم توضيح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال : أوجد الحل الأمثل للمسألة السابقة باستعمال **طريقة التكلفة الدنيا** في إيجاد الحل الأساسي الأول و **طريقة التخطي** في سيرورة الحل.

انطلاقا من جدول التكاليف للمثال المشار إليه، نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي :

مصب / منبع	الوسط	الشرق	الغرب	العرض (10^3 قا)
موزاية	1 x_{11}	4 x_{12}	5 x_{13}	55
سعيدة	5 x_{21}	7 x_{22}	3 x_{23}	45
باتنة	10 x_{31}	8 x_{32}	9 x_{33}	20
الطلب (10^3 قا)	40	30	50	120

نبدأ الحل بالبحث عن أقل تكلفة في الجدول، أقل تكلفة هي 1 في الخلية (1، 1)، العرض هو 55 ألف وحدة و الطلب هو 40 ألف وحدة، نشبع هذه الخلية بالقيمة 40 ألف و هي أقصى ما يمكن نقله إلى المصب 1، أي أن المنبع 1 يلبي كل احتياجات المصب 1 البالغة 40 ألف وحدة و يتبقى لهذا المنبع عرض مقداره 15 ألف وحدة.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 3 و هي المقابلة للمنبع 2 و المصب 3، لذلك يتم تشبيع الخلية (2، 3)، حيث العرض هو 45 ألف وحدة بينما الطلب هو 50 ألف وحدة لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 45 ألف وحدة، و بذلك يسوق المنبع 2 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب 3 قيمة 5 ألاف وحدة على تلبية كل احتياجاته.

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	باقي	باقي
منبع 1	[1] 40	[4] 15	[5]	55	15	0
منبع 2	[5]	[7]	[3] 45	45	0	
منبع 3	[10]	[8] 15	[9] 5	20	5	0
b_j	40	30	50	120		
باقي	0	15	5			
باقي		0	0			

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 4 و هي المقابلة للمنبع 1 و المصب 2، لذلك يتم تشبيع الخلية (1، 2)، حيث العرض المتبقي هو 15 ألف بينما الطلب هو 30 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15 ألف وحدة، و بذلك يسوق المنبع 1 كل ما كان يعرضه و يتبقى للمصب 2 قيمة 15 ألف وحدة لم تلبى بعد.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 5 و هي المقابلة للمنبع 1 و المصب 3، لذلك يتم تشبيع الخلية (1، 3)، غير أنه لا يوجد من أين نشبعها لأن المنبع 1 سوق كل ما كان يعرضه.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 5 و هي المقابلة للمنبع 2 و المصب 1، لذلك يتم تشبيع الخلية (2، 1)، غير أن صف و عمود هذه الخلية معا مشبعان.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 7 و هي المقابلة للمنبع 2 و المصب 2، لذلك يتم تشبيع الخلية (2، 2)، غير أنه لا يوجد من أين نشبعها لأن المنبع 2 سوق كل ما كان يعرضه.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 8 و هي المقابلة للمنبع 3 و المصب 2، لذلك يتم تشبيع الخلية (3، 2)، حيث العرض هو 20 ألف وحدة بينما الطلب المتبقى هو 15 ألف وحدة، لذلك فأقصى قيمة يمكن أن نشبع بها هذه الخلية هي 15 ألف وحدة، و بذلك يتبقى للمنبع 3 قيمة 5 ألاف وحدة غير مسوقة، بينما يحصل المصب 2 على كل احتياجاته.

- التكلفة الموالية في الترتيب التصاعدي في الجدول هي 9 و هي المقابلة للمنبع 3 و المصب 3، لذلك يتم تشبيع الخلية (3، 3)، حيث العرض هو 5 ألاف وحدة و الطلب أيضا هو 5 ألاف وحدة، لذلك يتم تشبيع سطر و عمود هذه الخلية في آن واحد.

و يتم بذلك تصريف كل الكميات المعروضة و تلبية كل الاحتياجات المطلوبة، و نلاحظ أننا حصلنا على عدد من المتغيرات الداخلة إلى الحل مساو إلى m+n-1 و في نفس الوقت حافظنا على توازن الجدول.

و نحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول **بطريقة التكلفة الدنيا** و هو :

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 45	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20
b_j	40	30	50	120

سيرورة الحل لأمثل : سيرورة الحل تتم تماما كما جرى عليه الحال في طريقة الزاوية الشمالية الغربية- طريقة التخطي، حيث يتم إيجاد التكاليف الحدية، **في حالة ما إذا كانت جميع التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة أكبر أو تساوي الصفر نكون قد توصلنا إلى خطة الحل الأمثل**، و في الحالة المعاكسة ندخل إلى الحل الخلايا التي تأخذ أقل قيمة في الاتجاه السالب ثم نجري التحويلات اللازمة كما تم شرح ذلك في طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

و نلاحظ أن جدول الحل الأساسي الأول المتوصل إليه هو نفسه جدول الحل الأساسي الأمثل المتوصل إليه في طريقة الزاوية الشمالية الغربية سابقا، حيث أن كل التكاليف الحدية المحسوبة غير سالبة، و هي :

$$\sigma_{13} = 5 - 9 + 8 - 4 = 0$$

$$\sigma_{21} = 5 - 1 + 4 - 8 + 9 - 3 = 6$$

$$\sigma_{22} = 7 - 3 + 9 - 8 = 5$$

$$\sigma_{31} = 10 - 1 + 4 - 8 = 5$$

و يتم شرح الجدول أيضا بنفس الطريقة.

تجدر الإشارة إلى أنه **أثناء البحث عن الحل الأساسي الأول، و في حالة تساوي تكلفتين نعطي الأولوية للتي تكون مرفقة بأكبر كمية لكونها تؤدي إلى تكلفة إجمالية أقل.**

ميزة طريقة التكلفة الدنيا أنها تقربنا أكثر إلى الحل الأمثل، على عكس طريقة الزاوية الشمالية الغربية التي تخضع للحظ.

4 - طريقة فوجل- La méthode de Vogel:

و تسمى أيضا طريقة الجزاء، في هذه الطريقة يتم إيجاد **الحل الأساسي الأول** باتباع المنهجية التالية :

1 - إيجاد الفرق بين أدنى تكلفة و التكلفة الموالية لها من حيث الصغر، و هذا سطريا و عموديا، تسمى هذه الفروقات **بأرقام فوجل**.

2 - نبحث عن أكبر رقم من أرقام فوجل المحسوبة في الخطوة الأولى على مستوى الأسطر و الأعمدة، ثم نبحث عن أقل تكلفة مقابلة له في السطر أو العمود الذي ينتمي إليه هذا الرقم، و ندخل الخلية التي تنتمي إليها الأقل تكلفة إلى الحل، ليتشبع إما السطر أو العمود حسب المعطيات.

3 - نعود من جديد إلى الخطوة الأولى مع تفادي إعادة إيجاد الفروقات بالنسبة للأسطر أو الأعمدة المشبعة، و هذا حتى تصريف كل المعروض و تلبية كل الطلب، و نكون بذلك قد حصلنا على جدول الحل الأساسي الأول.

4 - بعد إيجاد جدول الحل الأساسي الأول نتبع نفس خوارزمية سيرورة الحل كما تم عرضها في طريقة الزاوية الشمالية الغربية، بإحدى الطريقتين إما طريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل.

ملاحظات :

1 - في حالة وجود قيمتين عظمتين من أرقام فوجل فإننا نقارن بين التكلفتين الأدنى، و نختار أقل تكلفة مقابلة و نشبع الخلية التي تنتمي إليها، و في حالة ما إذا كانت هاتين التكلفتين أيضا متساويتين نختار أحدهما لا على التعيين.

2 - عند حساب أرقام فوجل فإنه في حالة وجود تكلفتين أدنى متساويتين فإننا نحسب أيضا الفرق بينهما و هو صفر.

مثال : أوجد الحل الأمثل لمسألة المثال السابق باستعمال طريقة فوجل- التخطي.

انطلاقا من جدول المسألة الموالي (السابق) نقوم بإيجاد جدول الحل الأساسي الأول كما يلي :

منبع / مصب	الوسط	الشرق	الغرب	العرض (10^3 قا)
موزاية	1 x_{11}	4 x_{12}	5 x_{13}	55
سعيدة	5 x_{21}	7 x_{22}	3 x_{23}	45
باتنة	10 x_{31}	8 x_{32}	9 x_{33}	20
الطلب (10^3 قا)	40	30	50	120

الفروقات الأولى :

الصف الأول : أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 4 و الفرق بينهما هو 3.

الصف الثاني : أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5 و الفرق بينهما هو 2.

الصف الثالث : أقل تكلفة هي 8 و التي تليها هي 9 و الفرق بينهما هو 1.

العمود الأول : أقل تكلفة هي 1 و التي تليها هي 5 و الفرق بينهما هو 4.

العمود الثاني : أقل تكلفة هي 4 و التي تليها هي 7 و الفرق بينهما هو 3.

العمود الثالث : أقل تكلفة هي 3 و التي تليها هي 5 و الفرق بينهما هو 2.

نسجل هذه الفروقات في الجدول الموالي أي في خانات الفرق 1 سطريا و عموديا.

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i	فرق 1	فرق 2	فرق 3	فرق 4
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55	3	1	1	
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 45	45	2	4	1	
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20	1	1		1
b_j	40	30	50	120				
فرق 1	4	3	2					
فرق 2		3	2					
فرق 3		4	4					

أكبر قيمة في الفرق 1 سطريا و عموديا هي 4 موجودة في العمود الأول، و عليه نبدأ بتشبيع الخلية المقابلة لأقل تكلفة و هي الخلية (1، 1)، حيث أن العرض هو 55 و الطلب 40، لذلك فأقصى قيمة يمكن إعطاءها لهذه الخلية هي 40، و يشبع بذلك العمود الأول، بينما تبقى قيمة عرض مقدارها 15 بالنسبة للمنبع 1.

الفرق i : هو الفرق بين اقل تكلفة و التكلفة التي تليها على مستوى الأعمدة.

الفرق j : هو الفرق بين اقل تكلفة و التكلفة التي تليها على مستوى الأسطر تظهر فروقات التكاليف بأرقام صغيرة.

نعود من جديد و نحسب الفروقات 2 مع تجاهل تكاليف الخلايا المملوءة و الأسطر و الأعمدة المشبعة.

الفروقات الثانية :

نعود من جديد بنفس المنهجية السابقة، نحسب أرقام فوجل و ندونها في عمود أو سطر الفرق 2 كما يظهر في الجدول أعلاه، دون الأخذ بعين الاعتبار العمود الذي تشبع، حيث نجد أن أكبر رقم من أرقام فوجل هو 4 على مستوى السطر 2، و اصغر تكلفة على مستوى هذا السطر هي 3 في الخلية (2، 3)، بما أن الكميات المعروضة عندها هي 45 و المطلوبة هي 50، لذلك نوجه لها الكمية 45 و يشبع بذلك السطر الثاني و يبقى احتياج مقداره 5 للعمود الثالث.

الفروقات الثالثة :

نحسب من جديد أرقام فوجل و نجد أكبر رقم هو 4 على مستوى العمودين 2 و 3، غير أننا نختار العمود الثاني لاحتضانه أقل تكلفة، حيث المعروض المتبقى هو 15 و المطلوب هو 30، لذلك توجه له الكمية 15 و يشبع بذلك السطر الأول و يبقى المقدار 15 احتياج في العمود الثاني.

الفروقات الرابعة :

يبقى فرق وحيد و مقداره 1 على مستوى السطر الثالث، حيث أقل تكلفة تقابله هي 8، لذلك يوجه للخلية (3، 2) ما مقداره 15 و يبقى عرض مقداره 5، يوجه في المرحلة الموالية للخلية (3، 3).

و يظهر الحل الأساسي الأول بطريقة فوجل كما هو موضح في الجدول أدناه :

مصب / منبع	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 45	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20
b_j	40	30	50	120

و واضح أن عدد الخلايا الداخلة في الحل تساوي إلى m+n-1 و هو 5.
و يبقى أن نختبر الآن إذا ما كان الحل أمثلا أو هو قابل للتحسين، و ذلك عن طريق التكاليف الحدية كما جرى شرحها في سيرورة الحل في طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و عليه تكون التكاليف الحدية كما يلي :

$$\sigma_{31} = 5 - 9 + 8 - 4 = 0$$
$$\sigma_{21} = 5 - 3 + 9 - 8 + 4 - 1 = 6$$
$$\sigma_{22} = 7 - 3 + 9 - 8 = 5$$
$$\sigma_{33} = 10 - 8 + 4 - 1 = 5$$

يلاحظ أن كل التكاليف الحدية غير سالبة، و بالتالي فإن هذا الحل هو حل أمثل لكنه ليس وحيد و تفسيره كما يلي :

أ ـ وحدة موزاية تمون :

- منطقة الوسط بـ 40 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 40 ألف دينار.
- منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 60 ألف دينار.

ب ـ وحدة سعيدة تمون :

ـ منطقة الغرب بـ 45 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 135 ألف دينار.

ج ـ وحدة باتنة تمون :

ـ منطقة الشرق بـ 15 ألف وحدة بتكلفة تقدر بـ 120 ألف دينار.

ـ منطقة الغرب بـ 5 آلاف وحدة بتكلفة تقدر بـ 45 ألف دينار.

و تتحمل مؤسسة المياه المعدنية المالكة للثلاث وحدات أدنى تكلفة تموين و هي 400 ألف دينار خلال الفترة.

غير أن هذا الحل **ليس وحيدا** إذ بإمكاننا أن نجد حلا أمثلا آخر بنفس التكلفة الإجمالية ما دام أن التكلفة الحدية للخلية (1، 3) تساوي إلى الصفر، بمعنى أنه يمكن إدخالها إلى الحل الأمثل دون أن يحدث أي تغيير على التكلفة الإجمالية، و بإيجاد المسار و إجراء التحويلات نجد الحل الثاني الذي يظهره الجدول أدناه :

منبع \ مصب	مصب 1	مصب 2	مصب 3	a_i
منبع 1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
منبع 2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 45	45
منبع 3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20
b_j	40	30	50	120

حيث يعطي نفس التكاليف الإجمالية الدنيا و هي 400 ألف دينار.

تلخيص خوارزمية الحل :

بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث :

- تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع إلى كل مصب.
- كميات عرض كل منبع و كميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب.

- إيجاد الحل الأساسي الأول بإحدى الطرق : الزاوية الشمالية الغربية، أو التكلفة الدنيا، أو فوجل.

- يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط : $m+n-1$.

- نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا إما بطريق التخطي أو طريقة التوزيع المعدل.

- نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل $\sigma_{ij} \geq 0$.

- إذا كان الحل غير امثل نحسنه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة، أما إذا كان الحل أمثلا نتوقف و نشرحه.

خامسا : حالات خاصة في مسائل النقل :

من الحالات الشائعة التي يمكن مصادفتها في مسائل النقل، عدم تساوي العرض مع الطلب و حالة التفكك.

1 ـ عدم تساوي العرض مع الطلب :

إن إيجاد الحل الأساسي الأول، و إيجاد الحل الأمثل يتطلب شرطا أساسيا و هو **تساوي العرض مع الطلب**، أي :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط في الواقع، إذ يكون إما العرض أكبر من الطلب أو الطلب أكبر من العرض، و في هذه الحالة ينبغي العمل على توفير هذا الشرط تحايلا، و ذلك كما يلي :

ـ حالة العرض أقل من الطلب، أي :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ينبغي إضافة منبع (سطر) خيالي إلى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين العرض و الطلب، و تكاليف النقل من هذا المنبع إلى أي مصب نفترضها معدومة.

- حالة العرض أكبر من الطلب، أي :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ينبغي إضافة مصب (عمود) خيالي إلى جدول المسألة، و تكاليف النقل من أي منبع إلى هذا المصب نفترضها معدومة.

في الحالتين نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأساسي الأول ثم الحل أمثل بصفة عادية، ثم نحذف في النهاية السطر أو العمود الذي تمت إضافته.

2 - حالة التفكك :

و نعني بها أن عدد المتغيرات الداخلة في أي حل أساسي لا تساوي m+n-1 و هو شرط أساسي لإيجاد مسارات اختبار الحل، و للتخلص من هذا المشكل أيضا نلجأ إلى التحايل، و ذلك بوضع خلية تصورية (أو أكثر حسب الحالة) داخلة في الحل نفترض قيمتها تساوي ε (أي قيمة بجوار الصفر)، ثم نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأمثل، و نهملها تماما في النهاية، باعتبارها قيمة مساعدة فقط، و يتم ذلك سواء حصل التفكك في جدول الحل الأساسي الأول أو في جداول الحل الموالية.

مثال : مؤسسة لها ثلاثة مصانع متجانسة الإنتاج، مكلفة بتموين ثلاثة مخازن في جهات متباعدة، إذا علمت أن كميات عرض كل مصنع و طاقات استقبال كل مخزن، و تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالدينار من كل مصنع إلى كل مخزن، معروضة في الجدول أدناه :

مصب / منبع	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	60
(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	20
(3)	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	30
b_j	50	50	30	110 130

المطلوب : أوجد الحل الأمثل بطريقة التكلفة الدنيا و أسلوب التوزيع المعدل ؟

يلاحظ أن مجموع العرض هو 110 و مجموع الطلب هو 130، أي أننا أمام حالة عدم تساوي العرض مع الطلب، و الفارق بينهما هو 20 وحدة، لذلك تتم إضافة منبع خيالي (سطر) بعرض قيمته 20، و بتكاليف نقل صفرية، و نحصل بذلك على الجدول الموالي :

منبع \ مصب	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	60
(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	20
(3)	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$ ε	$\boxed{4}$	30
(4) خيالي	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	20
b_j	50	50	30	130

باستخدام طريقة التكلفة الدنيا نحصل على جدول الحل الأساسي، و الذي تظهر فيه مختلف مراحل إيجاده.

و لعل ما يلفت الانتباه و يجب التوقف عنده، هو أننا عند وصولنا إلى تشبيع الخلية (3، 3) التي تنتمي إليها التكلفة 4، نجد أن السطر و العمود يتشبعان في آن واحد، قبل نفاذ كل العرض و تلبية كل الطلب، و هي الحالة التي تحيلنا على حل متفكك، لذلك يتم تجنب هذه الحالة بتشبيع إما السطر فقط أو العمود فقط، و في مثالنا افترضنا بقاء قيمة صغيرة جدا بجوار الصفر كعرض للمنتج 3، و يتم التعامل معها و كأنها قيمة عادية موجبة، و هذا حتى يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل تساوي $m+n-1$ أي 6، و يلاحظ أنه لو لم نلجأ إلى هذه الخلية لوجدنا الحل متفكك أي $m+n-1$ يساوي 5 و ليس 6.

منبع \ مصب	(1)	(2)	(3)	a_i	باقي	باقي
(1)	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$	60	10	0
(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{7}$	20	0	
(3)	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$ ε	$\boxed{4}$ 30	30	ε	0
(4) خيالي	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 20	$\boxed{0}$	20	0	
b_j	50	50	30	130		
باقي	0	30	0			
باقي		20				
باقي		0				

و عليه فإن الحل الأساسي الأول يظهر في الجدول الموالي و هو يتضمن سطر خيالي و قيمة افتراضية في الخلية (3، 2).

و الآن نختبر الحل إذا كان أمثلا أم هو قابل للتحسين بأسلوب **التوزيع المعدل** كما هو مطلوب.

إيجاد : $c_{ij}=U_i + V_j$ للخلايا المملوءة، و بافتراض : $U_1=0$ نجد :

$$U_1+V_1=1 \Rightarrow V_1=1$$
$$U_1+V_2=2 \Rightarrow V_2=2$$
$$U_2+V_2=6 \Rightarrow U_2=4$$
$$U_3+V_2=8 \Rightarrow U_3=6$$
$$U_3+V_3=4 \Rightarrow V_3=-2$$
$$U_4+V_2=0 \Rightarrow U_4=-2$$

إيجاد : $\sigma_{ij}=c_{ij}-U_i-V_j$ للخلايا الفارغة.

$$\sigma_{13} = 3 - U_1 - V_3 = 3 - 0 + 2 = 5$$
$$\sigma_{21} = 5 - U_2 - V_1 = 5 - 4 - 1 = 0$$
$$\sigma_{23} = 7 - U_2 - V_3 = 7 - 4 + 2 = 5$$
$$\sigma_{31} = 9 - U_3 - V_1 = 9 - 6 - 1 = 2$$
$$\sigma_{41} = 0 - U_4 - V_1 = 0 + 2 - 1 = 1$$
$$\sigma_{43} = 0 - U_4 - V_3 = 0 + 2 + 2 = 4$$

منبع \ مصب	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$	60
(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{7}$	20
(3)	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$ ε	$\boxed{4}$ 30	30
(4) خيالي	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 20	$\boxed{0}$	20
b_j	50	50	30	130

بما أن كل التكاليف الحدية للخلايا الشاغرة غير سالبة لذلك فإن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل، لكنه غير وحيد لكون أن التكلفة الحدية للخلية (2، 1) تساوي الصفر، و يكون جدول الحل الأمثل كما يلي :

منبع / مصب	(1)	(2)	(3)	a_i
(1)	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$	60
(2)	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{7}$	20
(3)	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$ 30	30
b_j	50	50	30	

و يلاحظ أننا أهملنا سطر المنبع الخيالي و القيمة ε على اعتبار أنهما مساعدان فقط، و تكون التكلفة الدنيا التي تتحملها المؤسسة هي :

$$Z = 50 + 20 + 120 + 120 = 310$$

و يلاحظ كذلك أن كل المصانع صرفت معروضاتها إلا أنه على مستوى الطلب يبقى المستودع الثاني في حالة عجز يقدر بـ 20 وحدة.

شكرا على حسن الاصغاء