Chapitre 1 : Intégrales simples et multiples

1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et le calcul de primitives

Les intégrales multiples constituent la généralisation des intégrales dites simples : c'est-à-dire les intégrales d'une fonction d'une seule variable réelle. On s'attache ici à la généralisation à des fonctions dont le nombre de variables est plus important (deux ou trois).

1.1 Intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann est une méthode permettant de définir l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné.

1.2 Définition formelle de l'intégrale de Riemann

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On divise cet intervalle en n sous-intervalles de longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, puis on choisit un point x_i^* dans chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. La somme de Riemann associée à cette division est donnée par :

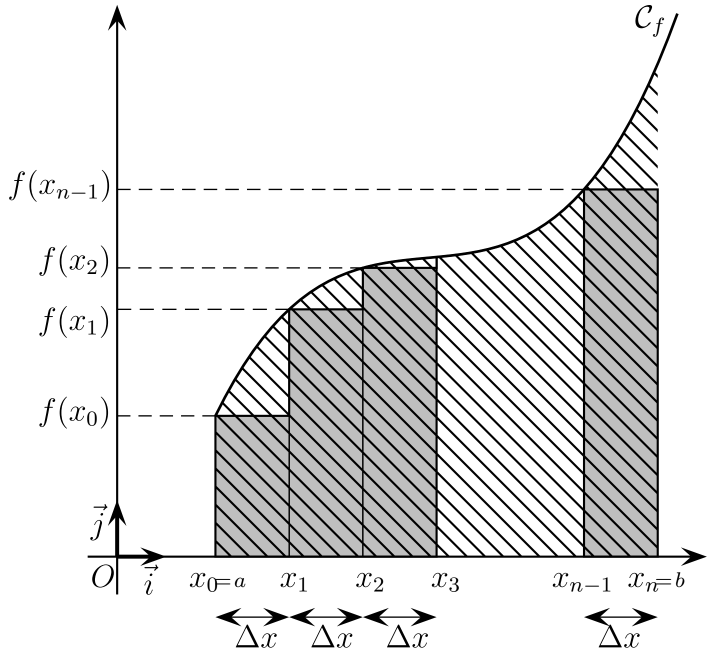
$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

L'intégrale de Riemann de f sur l'intervalle $[a, b]$ est la limite de cette somme lorsque le nombre de sous-intervalles tend vers l'infini et que leur longueur tend vers zéro :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Définition 1.1 : (Intégrale définie) Si la suite S_n a une limite finie quand $n \to +\infty$, on appelle cette limite intégrale de f sur $[a, b]$, et on note

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$



Exemple 1
(Calcul d'une intégrale à l'aide de la somme de Riemann)

— Considérons la fonction continue $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous souhaitons calculer l'intégrale de cette fonction sur cet intervalle à l'aide de la somme de Riemann :

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

— Nous divisons l'intervalle $[0, 1]$ en n sous-intervalles égaux de longueur $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$.
Les points de division sont $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = 1$.

— Pour chaque sous-intervalle, choisissons le point x_i^* comme étant l'extrémité droite, c'est-à-dire $x_i^* = x_i = \frac{i}{n}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

— La somme de Riemann associée à cette division est donnée par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

C'est-à-dire :

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

— Il est connu que la somme des carrés des n premiers entiers est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— Ainsi, la somme de Riemann devient :

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

— Pour obtenir l'intégrale, il suffit de prendre la limite de S_n lorsque $n \to \infty$:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

En développant et en simplifiant, on obtient :

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Ainsi, l'intégrale de $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$ est $\frac{1}{3}$.

1.3 Calcul de primitives

1.3.1 Quelques propriétés de l'intégrale

1.Linéarité Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et λ, μ sont des constantes :

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Monotonie Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Positivité Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

4. Additivité Si $c \in [a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

1.3.2 Lien entre primitives et intégrales

Théorème 1.1 : Soit f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. On note F une primitive de f. Alors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.3.3 Table : Primitives usuelles

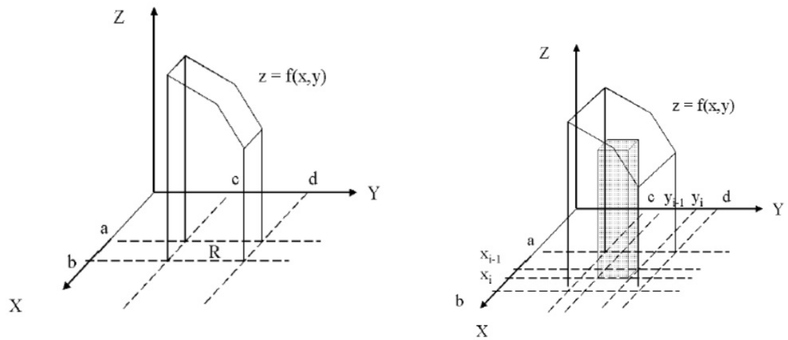
$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	intervalles acceptables
$x^m,\ m \neq -1$	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + K$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|) + K$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1) + K$	$]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x)),\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0; +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|) + K$	$\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x)) + K$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + K$	$]-1; 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + K$	$]-\infty; -1[$ ou $]-1; 1[$ ou $]1; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{argsh}(x) + K = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + K$	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$u'(x)u(x)^n$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + K$	$\frac{u'(x)}{u(x)^n},\ n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)u(x)^{n-1}} + K$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\|u(x)\|) + K$	$u'(x)\exp(u(x))$	$\exp(u(x)) + K$
$u'(x)u(x)^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	$u'(x)\sqrt{u(x)}$	$2\sqrt{u(x)} + K$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + K$	$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + K$
$u'(x)\tan(u(x))$	$-\ln(\|\cos(u(x))\|) + K$	$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$\tan(u(x)) + K$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	$\arcsin(u(x)) + K$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan(u(x)) + K$

2 Intégrales doubles

2.1 Principe de l'intégrale double sur un rectangle

Soit f la fonction réelle des deux variables x et y, continue sur un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. Sa représentation est une surface S dans l'espace muni du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.



On partage D en sous-rectangles, dans chaque sous-rectangle $[x_{i+1}, x_i] \times$

$[y_{j-1}, y_j]$ on choisit un point $M(x, y)$ et on calcule l'image de (x, y) pour la fonction f.

La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur $f(x, y)$ est une approximation du volume compris entre le plan $Z = 0$ et la surface S. Lorsque le quadrillage devient

suffisamment (fin) pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Riemann et on le note

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{\substack{0\leq i\leq n-1,\\ 0\leq j\leq n-1}} f\left(a + i\frac{b-a}{n}, a + j\frac{b-a}{n}\right)$$

Exemple : En utilisant la définition, calculer $\int\int_{[0,1]\times[0,1]} (x + 2y)\, dxdy$.

Remarques :

— A priori, l'intégrale double est faite pour calculer des volumes, de même que l'intégrale simple était faite pour calculer une aire.

— Dans une intégrale double, les bornes en x et y doivent toujours être rangées en ordre croissant.

Théorème 1.2 : Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.Alors toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann.

2.2 Formules de Fubini

Théorème 1.3 : Soit f une fonction continue sur un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$. Nous avons

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$

Exemple 01 : Calcul de $I = \int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x + y)\, dxdy$.

D'après Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dx\right] dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dy\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \sin y)\, dy \\
&= [\sin y - \cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.
\end{aligned}$$

Exemple 02 : Calcul de $I = \int\int_{[0,1]\times[2,5]} \frac{1}{(1+x+2y)^2} dxdy$.

Calculons

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^5 \left[\int_0^1 \frac{1}{(1+x+2y)^2} dx\right] dy = \int_2^5 \left[\frac{1}{(1+x+2y)}\right]_0^1 dy \\
&= \frac{1}{2} [\ln(1+2y) - \ln(2+2y)]_2^5 = \frac{1}{2} \ln \frac{11}{10}
\end{aligned}$$

Cas particulier : Si g et h sont deux fonctions continues, alors

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

Exemple : Calculer l'intégrale $\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin x \cos y dxdy$.

Théorème 1.4 : Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double $I = \int\int_D f(x, y)dxdy$ se calcule par l'une ou l'autre des façons suivantes :

— Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\ \text{ et } a \leq x \leq b\}$ alors

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right] dx.$$

— Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ g_1(x) \leq x \leq g_2(x)\ \text{ et } c \leq y \leq d\}$ alors

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Exemple 01 : Calculer l'intégrale $\int\int_D (x^2+y^2)\,dxdy$ avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\le x\le 1 \text{ et } x-1\le y\le 1-x\}$

$$\begin{aligned}\int\int_D \left(x^2+y^2\right)dxdy &= \int_0^1\left[\int_{x-1}^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy\right]dx\\ &= \int_0^1\left[x^2y+\frac{x^3}{3}\right]_{x-1}^{1-x}dx\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Exemple 02 : Calculer l'intégrale $\int\int_D (x+2y)\,dxdy$ avec $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ -1\le y\le 1 \text{ et } -\sqrt{1-y^2}\le x\le y+1\right\}$

$$\begin{aligned}\int\int_D (x+2y)\,dxdy &= \int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y+1}(x+2y)\,dx\right]dy\\ &= \int_{-1}^1\left(3y+2y\sqrt{1-y^2}+3y^2\right)dy\\ &= 2.\end{aligned}$$

Exemple 03 : Calculer l'intégrale $\int\int_D e^{x^2}dx$ et $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le x\le 1\}$

2.3 Changement de variable dans une intégrale double

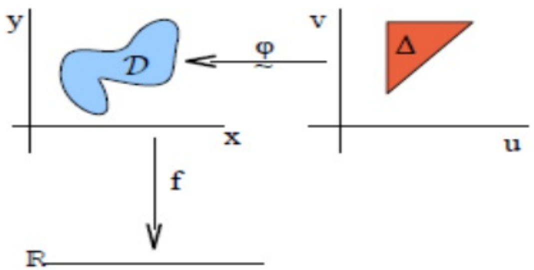
Nous allons avoir un résultat analogue à celui de l'intégrale simple, où le changement de variable $x=\varphi(t)$ nous demandait de remplacer le dx par $\varphi'(t)\,dt$. C'est le **Jacobien** qui va jouer le rôle de la dérivée :

Rappel : On appelle la matrice jacobienne de la matrice à p lignes et n colonnes :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Théorème 1.5 : Soit $(u,v)\in\Delta\to(x,y)=\varphi(u,v)\in D$ une bijection de classe C^1 du domaine Δ au domaine D. Soit $|J_\varphi|$ la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ. Alors, nous avons :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Lambda f\circ\varphi(u,v)\left|J_\varphi(u,v)\right|dudv$$



Exemple : Calculer $I = \int\int_D (x-1)^2\,dxdy$ sur le domaine $D = \{(x,y):\ -1\le x+y\le 1 \text{ et } -2\le x-y\le 2\}$.

En effectuant le changement de variable $u=x+y,\ v=x-y$. Le domaine D en (u,v) est donc le rectangle $\{-1\le u\le 1 \text{ et } -2\le v\le 2\}$. On a aussi $x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$. Le jacobien de ce changement de variables est

$J = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $|J| = -\frac{1}{2}$. Et donc

$$I=\frac{1}{8}\int_{-2}^2\left[\int_{-1}^1 (u+v-2)^2\,du\right]dv=\frac{136}{3}.$$

Changement de variable en coordonnées polaires

Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $(\tau,\theta)\to(\tau\cos\theta,\tau\sin\theta)$. Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et son jacobien vaut

$J_\varphi(\tau,\theta) = \begin{vmatrix}\cos\theta & -\tau\sin\theta\\ \sin\theta & \tau\cos\theta\end{vmatrix} = \tau.$

Et donc $I=\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Lambda g(\tau,\theta)\,\tau d\tau d\theta.$

Exemple : Calculer en passant en coordonnées polaires $I = \int\int_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ où $D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

D représente le quart de la partie comprise entre les deux cercles centrés à l'origine et de rayons 1 et 2 (anneau). D'où

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{\tau d\tau d\theta}{\tau^2} \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left(\int_1^2 \frac{d\tau}{\tau} \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

2.4 Applications

Calcul d'aire d'un domaine D : On a vu que $\int\int_D f(x,y)dxdy$ mesure le volume sous la représentation de f et au dessus de D. On a aussi la possibilité d'utiliser l'intégrale double pour calculer l'aire elle-même du domaine D. Il suffit pour cela de prendre $f(x,y) = 1$. Ainsi, l'aire A du domaine est $A = \int\int_D dxdy = \int\int_\Lambda \tau d\tau d\theta$.

Exemple : Calculer l'aire délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Notons l'aire de cette ellipse A, donc $A = \int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} dxdy$. Par symétrie et en passant aux coordonnées polaires généralisées : $x = a\tau\cos\theta,\ y = b\sin\theta$, on obtient

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 ab\tau d\tau d\theta = \pi ab.$$

3 Intégrales triples

Le principe est le même que pour les intégrales doubles.

Si $(x,y;z) \to f(x,y,z)$ est une fonction continue de trois variables sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$, on définit $\int\int\int_D f(x,y,z)\, dxdydz$ comme limite de somme de la forme

$$\sum_{i,j,k} f(u_i, v_j, w_k)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - x_{k-1}).$$

Remarque : On a les mêmes propriétés algébriques des intégrales doubles : linéarité, ...

3.1 Formules de Fubini

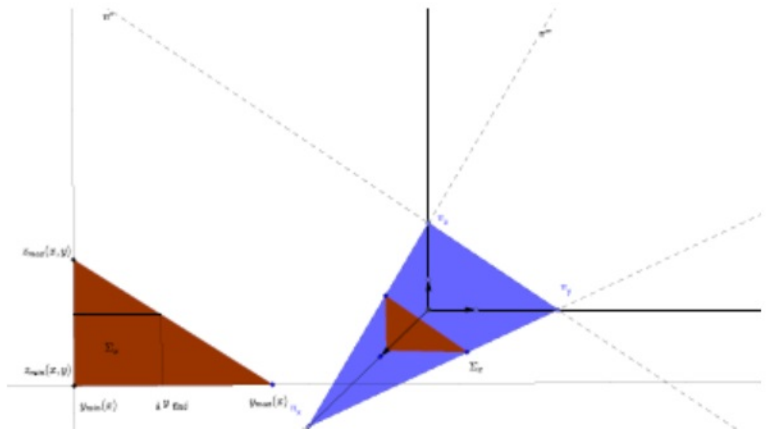
★ **Sur un parallélépipède** : Le théorème de Fubini s'applique de façon assez naturelle quand $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, on se ramène à calculer trois intégrales simples :

$$\begin{aligned} \int\int\int_D f(x,y,z)\, dxdydz &= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)\, dx \right] dy \right] dz \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Exemple : Calcul de $I = \int\int\int_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} (x + 3yz)\, dxdydz$.

★ **Sur un domaine quelconque borné** : Représentons un domaine D pour établir le traitement de la recherche des bornes d'intégration. Pour un certain x fixé, variant entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$, on découpe dans D une surface D_x. On peut alors représenter D_x dans le plan YOZ, puis le traitement sur D_x se fait comme avec les intégrales doubles :

$$I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx.$$



Exemple : Calcul de $I = \int\int\int_D (x^2 + yz)\, dxdydz$ sur le domaine

$$D = \{(x,y,z) : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x + y + 2z \leq 1\}.$$

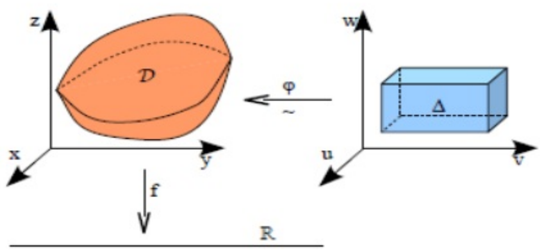
$$\begin{aligned}\int\int\int_D \left(x^2 + yz\right) dxdydz &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{1-2z} \left[\int_0^{1-x-2z} \left(x^2 + yz\right) dy\right] dx\right] dz \\ &= \frac{1}{96}.\end{aligned}$$

3.2 Changement de variables

Si l'on a une application bijective φ et de classe C^1 du domaine Δ sur le domaine D, définie par $(u,v,w) \longmapsto \varphi(u,v,w)$. La formule du changement de variables est :

$$\int\int\int_D f(x,y,z) dxdydz = \int\int\int_\Lambda f \circ \varphi(u,v,w) \left|J_\varphi(u,v,w)\right| dudvdw$$

en notant $|J_\varphi|$ la valeur absolue du déterminant du jacobien.



3.2.1 Calcul en coordonnées cylindriques

En dimension 3, les coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} x = \tau \cos\theta \\ y = \tau \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Avec

— r : la distance radiale du point à l'axe z,
— θ : l'angle azimutal dans le plan xy,
— z : la coordonnée verticale.

L'élément de volume est donné par :

$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de $\varphi : (\tau, \theta, z) \longmapsto (x,y,z)$ sera

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\tau\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \tau\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tau$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int\int\int_D f(x,y,z) dxdydz &= \int\int\int_\Delta g(\tau,\theta,z)\, \tau d\tau d\theta dz \\ &= \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left[\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \left[\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \tau g(\tau,\theta,z)\, dz\right] d\tau\right] d\theta.\end{aligned}$$

Exemple :Volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R

Le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R est donné par l'intégrale triple :

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r\, dr\, d\theta\, dz$$

1. Intégration par rapport à r :

$$\int_0^R r\, dr = \frac{R^2}{2}$$

2. Intégration par rapport à θ :

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

3. Intégration par rapport à z :

$$\int_0^h dz = h$$

Le volume du cylindre est donc :

$$V = h \times 2\pi \times \frac{R^2}{2} = \pi R^2 h$$

3.2.2 Calcul en coordonnées sphériques

En dimension 3, les coordonnées sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x = \tau \sin\theta \cos\phi \\ y = \tau \sin\theta \sin\phi \\ z = \tau \cos\theta \end{cases}$$

tel que

- r : la distance radiale,
- θ : l'angle azimutal dans le plan xy,
- φ : l'angle polaire mesuré à partir de l'axe z.

L'élément de volume est donné par :

$$dV = r^2 \sin(\varphi)\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de $\varphi : (\tau, \theta, \phi) \longmapsto (x, y, z)$ sera

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \tau\cos\theta\cos\phi & -\tau\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \tau\cos\theta\sin\phi & \tau\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\tau\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \tau^2 \sin\theta$$

Et donc

$$\int\int\int_D f(x,y,z) dxdydz = \int\int\int_\Delta g(\tau,\theta,\phi)\, \tau^2 \sin\theta d\tau d\theta d\phi$$

Exemple :
Calculer $I = \int\int\int_D z dxdydz$ où

$$D = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } z \geq 0 \right\}.$$

Le domaine D est l'hémisphère supérieur (centrée à l'origine et de rayon R), en passant aux coordonnées sphériques :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^R \tau^2 d\tau = \frac{\pi}{3} R^3.$$

3.3 Volume

Le volume d'un corps en trois dimensions peut être calculé par l'intégrale triple suivante :

$$V = \iiint_D dx\, dy\, dz$$

où D est le domaine délimité par le corps.

Exemple 1

Si D est un parallélépipède rectangle avec $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, et $z \in [e,f]$, alors le volume est donné par :

$$V = \int_a^b \int_c^d \int_e^f dx\, dy\, dz = (b-a)(d-c)(f-e)$$

Exemple 2 :

Calculer le volume d'une sphère. $V = \int\int\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dxdydz$, d'après la propriété de la symétrie : $V = 8\int\int\int_D dxdydz$ avec

$$D = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \right\},$$

d'où

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^R \tau^2 d\tau = \frac{4\pi}{3} R^3.$$