المحاضرة 06

الدفعات الثابتة بفائدة مركبة
ANNUITES CONSTANTES

عناصر المحاضرة

I. حساب القيمة المكتسبة للدفعات الثابتة :

1. دفعات نهاية المدة
2. دفعات بداية المدة

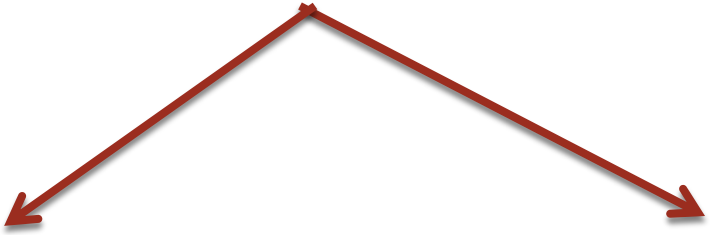
II. حساب القيمة الحالية لمتتالية دفعات ثابتة

1. دفعات نهاية المدة
2. دفعات بداية المدة

تعريف الدفعات:

يطلق مصطلح الدفعات بصفة عامة على المبالغ المدفوعة بانتظام خلال وحدات زمنية متتابعة ومتساوية

مجالات استعمال الدفعات:



موجهة لتكوين رأس مال " دفعات استثمار

(دفعات بداية المدة).

• موجهة لسداد الديون " دفعات سداد "

(دفعات نهاية المدة).

القيمة المكتسبة :

- تعبر عن القيمة المستقبلية المبلغ الإجمالي الذي يسدده المقترض للمقرض في نهاية مدة القرض أي وقت دفع الدفعة الأخيرة

I. حساب القيمة المكتسبة للدفعات الثابتة : An

1. حساب القيمة المكتسبة دفعات نهاية المدة

قيمة الدفعة الثابتة :a

عدد الدفعات : n

معدل الفائدة المركبة :i

القيمة المكتسبة نهاية المدة. :An

$$An = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$An = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

يحسب الحد باستخدام الجدول المالي رقم(3)

Table A3
Future Value Factors for a One-Dollar Ordinary Annuity Compounded at r Percent for n Periods

$$FVFA_{r\%,n} = PMT \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Period	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060	2.070	2.080	2.090	2.100	2.110	2.120	2.130	2.140	2.150
3	3.030	3.060	3.091	3.122	3.153	3.184	3.215	3.246	3.278	3.310	3.342	3.374	3.407	3.440	3.473
4	4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375	4.440	4.506	4.573	4.641	4.710	4.779	4.850	4.921	4.993
5	5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637	5.751	5.867	5.985	6.105	6.228	6.353	6.480	6.610	6.742
6	6.152	6.308	6.468	6.633	6.802	6.975	7.153	7.336	7.523	7.716	7.913	8.115	8.323	8.536	8.754
7	7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394	8.654	8.923	9.200	9.487	9.783	10.089	10.405	10.730	11.067
8	8.286	8.583	8.892	9.214	9.549	9.897	10.260	10.637	11.028	11.436	11.859	12.300	12.757	13.233	13.727
9	9.369	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491	11.978	12.488	13.021	13.579	14.164	14.776	15.416	16.085	16.786
10	10.462	10.950	11.464	12.006	12.578	13.181	13.816	14.487	15.193	15.937	16.722	17.549	18.420	19.337	20.304
11	11.567	12.169	12.808	13.486	14.207	14.972	15.784	16.645	17.560	18.531	19.561	20.655	21.814	23.045	24.349
12	12.683	13.412	14.192	15.026	15.917	16.870	17.888	18.977	20.141	21.384	22.713	24.133	25.650	27.271	29.002
13	13.809	14.680	15.618	16.627	17.713	18.882	20.141	21.495	22.953	24.523	26.212	28.029	29.985	32.089	34.352
14	14.947	15.974	17.086	18.292	19.599	21.015	22.550	24.215	26.019	27.975	30.095	32.393	34.883	37.581	40.505
15	16.097	17.293	18.599	20.024	21.579	23.276	25.129	27.152	29.361	31.772	34.405	37.280	40.417	43.842	47.580
16	17.258	18.639	20.157	21.825	23.657	25.673	27.888	30.324	33.003	35.950	39.190	42.753	46.672	50.980	55.717
17	18.430	20.012	21.762	23.698	25.840	28.213	30.840	33.750	36.974	40.545	44.501	48.884	53.739	59.118	65.075
18	19.615	21.412	23.414	25.645	28.132	30.906	33.999	37.450	41.301	45.599	50.396	55.750	61.725	68.394	75.836
19	20.811	22.841	25.117	27.671	30.539	33.760	37.379	41.446	46.018	51.159	56.939	63.440	70.749	78.969	88.212
20	22.019	24.297	26.870	29.778	33.066	36.786	40.995	45.762	51.160	57.275	64.203	72.052	80.947	91.025	102.444
21	23.239	25.783	28.676	31.969	35.719	39.993	44.865	50.423	56.765	64.002	72.265	81.699	92.470	104.768	118.810
22	24.472	27.299	30.537	34.248	38.505	43.392	49.006	55.457	62.873	71.403	81.214	92.503	105.491	120.436	137.632
23	25.716	28.845	32.453	36.618	41.430	46.996	53.436	60.893	69.532	79.543	91.148	104.603	120.205	138.297	159.276
24	26.973	30.422	34.426	39.083	44.502	50.816	58.177	66.765	76.790	88.497	102.174	118.155	136.831	158.659	184.168
25	28.243	32.030	36.459	41.646	47.727	54.865	63.249	73.106	84.701	98.347	114.413	133.334	155.620	181.871	212.793
30	34.785	40.568	47.575	56.085	66.439	79.058	94.461	113.283	136.308	164.494	199.021	241.333	293.199	356.787	434.745
35	41.660	49.994	60.462	73.652	90.320	111.435	138.237	172.317	215.711	271.024	341.590	431.663	546.681	693.573	881.170
40	48.886	60.402	75.401	95.026	120.800	154.762	199.635	259.057	337.882	442.593	581.826	767.091	1013.704	1342.025	1779.090
45	56.481	71.893	92.720	121.029	159.700	212.744	285.749	386.506	525.859	718.905	986.639	1358.230	1874.165	2590.565	3585.128
50	64.463	84.579	112.797	152.667	209.348	290.336	406.529	573.770	815.084	1163.909	1668.771	2400.018	3459.507	4994.521	7217.716

مثال تطبيقي:

تدفع مؤسسة " أضواء " في نهاية كل سنة دفعة قيمتها 20.000 دج لأحد البنوك تسديدا لقرض. عدد الدفعات 10 ومعدل الفائدة المركبة % 8 سنويا.

المعطيات :

a=20000

n=10

An ؟

$$An = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A_{10} = 20000\frac{(1+0.08)^{10} - 1}{0.08}$$

$$A_{10} = 20000 \times 14.487$$

$$A_{10} = 289740$$

❑ حساب قيمة الدفعة " a "

من الصيغة العامة نستنتج أن:

$$a = An \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

يحسب باستخدام الجدول المالي رقم(1)

مثال:

شخص مدين بمبلغ 280000 دج ، اتفق مع دائنه على تسديد الدين الذي عليه بعشر دفعات تدفع الدفعة الأولى في نهاية السنة الأولى. فإذا كان معدل الفائدة 6% سنويا. فما هي قيمة الدفعة الثابتة ؟

$$a = 280000 * \frac{0,06}{(1,06)^{10} - 1}$$

$$a = 280000 * \frac{0,06}{1.798 - 1}$$

$$a = 280000 * 0,0758679$$

$$a = 21243,012 \text{ DA}$$

❑ حساب عدد الدفعات " n "

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{A_n \ i}{a} = (1+i)^n - 1$$

$$(1+i)^n = \frac{A_n i}{a} + 1$$

$$\text{Log}\quad (1+i)^n = \quad \text{Log}\frac{A_n i}{a} + 1$$

$$n\ \text{Log}\ (1+i) = \text{Log}\ \frac{A_n i}{a} + 1$$

$$n = \frac{\text{Log}\ \frac{A_n i}{a} + 1}{\log\ (1+i)}$$

مثال:

يدفع تاجر في نهاية كل سنة دفعة ثابتة قيمتها **30000 دج** ،

فبلغت القيمة المكتسبة في نهاية المدة **267684,10 دج**. معدل

الفائدة المركبة **8 %**

فما هو عدد الدفعات**n**؟

$$(1+i)^n = \frac{A_n i}{a} + 1$$

$$(1.08)^n = \frac{267684{,}10 * 0.08}{30000} + 1$$

$$(1.08)^n = 1{,}713824266$$

$$\log (1.08)^n = \log 1.713824266$$

$$n \log (1.08) = \text{Log } 1.713824266$$

$$n = \frac{\text{Log } 1.713824266}{\log (1.08)}$$

$$n = \frac{0{,}233966288}{0{,}033423755}$$

$$n = 7$$

2. حساب القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة

$$\acute{A}_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن جملة متتالية دفعات بداية المدة ما هي إلا جملة متتالية دفعات نهاية المدة مضروبة في المقدار (1+i)

$$\acute{A}_n = A_n\,(1+i)$$

القيمة الحالية:

- العـودة بالـدفعات إلى تاريـخ توقيع العقد (التاريخ صفر)
- القيمـة الأصـلية لـرأس مـال عرفت قيمته في نهاية مدة معينة من التوظيف.

II. حساب القيمة الحالية لمتتالية دفعات ثابتة

A.حساب القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة

قيمة الدفعة الثابتة. a

عدد الدفعات. n

معدل فائدة مركبة i

القيمة الحالية لمتتالية دفعات في نهاية المدة V_0

$$V_0 = a \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

يحسب الحد $\frac{1}{i}\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)$ باستخدام الجدول المالي رقم(4)

مثال تطبيقي:

تحصلت مؤسسة " الألبسة الراقية " على قرض يسدد ب **15 دفعة سنوية** تدفع **الدفعة الأولى في نهاية السنة الأولى** من توقيع العقد. قيمة الدفعة الثابتة **78884,266 دج** ومعدل الفائدة المركبة المطبق **هو10% سنويا.**

احسب القيمة الحالية لمتتالية دفعات نهاية المدة (مبلغ القرض).

$$V_0 = \frac{78884,266}{0.1}\left(1 - \frac{1}{(1.1)^{15}}\right)$$

$$V_0 = 78884,266 \frac{1}{0.1}\left(1 - \frac{1}{(1.1)^{15}}\right)$$

من الجدول = ؟

Table A4

Present Value Factors for a One-Dollar Ordinary Annuity Discounted at r Percent for n Periods

$$PVFA_{r\%,n} = \frac{PMT}{r} \times \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Period	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909	0.901	0.893	0.885	0.877	0.870
2	1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736	1.713	1.690	1.668	1.647	1.626
3	2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487	2.444	2.402	2.361	2.322	2.283
4	3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170	3.102	3.037	2.974	2.914	2.855
5	4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791	3.696	3.605	3.517	3.433	3.352
6	5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355	4.231	4.111	3.998	3.889	3.784
7	6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868	4.712	4.564	4.423	4.288	4.160
8	7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335	5.146	4.968	4.799	4.639	4.487
9	8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759	5.537	5.328	5.132	4.946	4.772
10	9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145	5.889	5.650	5.426	5.216	5.019
11	10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495	6.207	5.938	5.687	5.453	5.234
12	11.255	10.575	9.954	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814	6.492	6.194	5.918	5.660	5.421
13	12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.103	6.750	6.424	6.122	5.842	5.583
14	13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367	6.982	6.628	6.302	6.002	5.724
15	13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.559	8.061	7.606	7.191	6.811	6.462	6.142	5.847
16	14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824	7.379	6.974	6.604	6.265	5.954
17	15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022	7.549	7.120	6.729	6.373	6.047
18	16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201	7.702	7.250	6.840	6.467	6.128
19	17.226	15.678	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365	7.839	7.366	6.938	6.550	6.198
20	18.046	16.351	14.877	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514	7.963	7.469	7.025	6.623	6.259
21	18.857	17.011	15.415	14.029	12.821	11.764	10.836	10.017	9.292	8.649	8.075	7.562	7.102	6.687	6.312
22	19.660	17.658	15.937	14.451	13.163	12.042	11.061	10.201	9.442	8.772	8.176	7.645	7.170	6.743	6.359
23	20.456	18.292	16.444	14.857	13.489	12.303	11.272	10.371	9.580	8.883	8.266	7.718	7.230	6.792	6.399
24	21.243	18.914	16.936	15.247	13.799	12.550	11.469	10.529	9.707	8.985	8.348	7.784	7.283	6.835	6.434
25	22.023	19.523	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.823	9.077	8.422	7.843	7.330	6.873	6.464
30	25.808	22.396	19.600	17.292	15.372	13.765	12.409	11.258	10.274	9.427	8.694	8.055	7.496	7.003	6.566
35	29.409	24.999	21.487	18.665	16.374	14.498	12.948	11.655	10.567	9.644	8.855	8.176	7.586	7.070	6.617
40	32.835	27.355	23.115	19.793	17.159	15.046	13.332	11.925	10.757	9.779	8.951	8.244	7.634	7.105	6.642
45	36.095	29.490	24.519	20.720	17.774	15.456	13.606	12.108	10.881	9.863	9.008	8.283	7.661	7.123	6.654
50	39.196	31.424	25.730	21.482	18.256	15.762	13.801	12.233	10.962	9.915	9.042	8.304	7.675	7.133	6.661

V_0= 78884,266 x 7.606

V_0= 78884,266 x 7.606= 600000دج

B.حساب القيمة الحالية لدفعات بداية المدة

$$V'_0 = \frac{a}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)(1+i)$$

$$V_0$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن جملة متتالية دفعات بداية المدة ما هي إلا جملة متتالية دفعات نهاية المدة مضروبة في المقدار $(1+i)$

$$V'_0 = V_0\,(1+i)$$