Chapitre 2 : Intégrales Impropres (Généralisées)

En première année, nous avons étudié l'intégrale d'une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. Dans ce chapitre, nous allons étendre ce concept en étudiant des cas plus complexes :

— Fonctions continues sur un intervalle ouvert (a, b) mais non nécessairement sur l'intervalle fermé $[a, b]$.
— Fonctions définies sur des intervalles non bornés, tels que $(a, +\infty)$ ou $(-\infty, b)$ ou $(-\infty, +\infty)$.
— Fonctions présentant des singularités au voisinage de a ou b.

Ces situations mènent à la notion d'**intégrales impropres**. Voici les trois principaux types :

1. **Intégrale sur un intervalle non borné :**
2. **Intégrale avec une singularité au voisinage de a ou b :**
3. **Mélange des deux types (Intervalle infini et singularité) :**

1 Définitions

Définition 1
Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite localement intégrable sur I, si elle est intégrable sur tout intervalle compact de I.

Définition 2
On dit que c est un point singulier pour la fonction f si elle n'est pas bornée en ce point i.e.

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \infty.$$

1.1 Intégrales impropres de $1^{ère}$ espèce

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est une intégrale impropre (ou généralisée) de $1^{ère}$ espèce si au moins l'une des bornes de l'intervalle (a, b) est infinie.

Si f est localement intégrable sur (a, b) alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)\,dt, \quad \int_{-\infty}^b f(t)\,dt = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \int_x^b f(t)\,dt$$

Si les limites ci-dessus existent et sont finies, on dit que les intégrales impropres qu'elles définissent **convergent**, si non on dit qu'elles **divergent**.

Exemple 1
Soit l'intégrale definie par

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Est une intégrale impropre du $1^{ère}$ espèce, et on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt &= \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

L'intégrale converge et vaut 1.

Exemple 2
Soit $p > 0$, $I = \int_{-\infty}^0 e^{pt}dt$ est une intégrale impropre du $1^{ère}$ espèce.

$$I = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \int_x^0 e^{pt}dt = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left[\frac{e^{pt}}{p}\right]_x^0 = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1 - e^{px}}{p} = \frac{1}{p}.$$

Donc I converge.

Exemple 3
Soit

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

J converge.

Exemple 4

$$K=\int_{\pi}^{+\infty}\cos t dt=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left[\int_{\pi}^{x}\cos t dt\right]=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left[\sin x\right]$$

n'existe pas, alors K diverge.

Exemple 5
Soit $\alpha>0,\ \ I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ est une intégrale de $1^{ère}$ espèce.

$$I=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\int_1^x\frac{1}{t^\alpha}dt=\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\ln x & =+\infty \qquad \text{si } \ \alpha=1\\ \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x & =\begin{cases}+\infty & \text{si } \alpha<1\\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha>1\end{cases}\end{cases}$$

Alors

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt\quad\begin{cases}\text{converge si } \alpha>1\\ \text{diverge si } \alpha<1,\end{cases}$$

cette intégrale est dite de **Riemann** de $1^{ère}$ espèce.

1.2 Intégrales impropres de second espèce

Soit la fonction f localement intégrable sur (a,b). L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite généralisée de 2^{nd} espèce si f possède au moins un point singulier dans l'intervalle (a,b). Si a est un point singulier, par définition

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\longrightarrow a^+}\int_x^b f(t)\,dt$$

Si b est un point singulier

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\longrightarrow b^-}\int_a^x f(t)\,dt$$

Si le point singulier $c\in(a,b)$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\longrightarrow c^+}\int_a^x f(t)\,dt+\lim_{x\longrightarrow c^+}\int_x^b f(t)\,dt.$$

Si les limites ci-dessus existent et sont finies, on dit que les intégrales impropres qu'elles définissent convergent, si non on dit qu'elles divergent.

Exemple 6
Soit l'intégrale $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, 0 est un point singulier pour la fonction $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}f(t)=+\infty$. Donc cette intégrale est une intégrale généralisée de 2^{nd} espèce. alors

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt&=\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt\\&=\lim_{x\to 0^+}\left[2\sqrt{t}\right]_x^1\\&=\lim_{x\to 0^+}\left(2-2\sqrt{x}\right)\\&=2.\end{aligned}$$

L'intégrale converge et vaut 2.

Exemple 7
Soit $I=\int_2^9\frac{dt}{\sqrt{9-t}}$. 9 est un point singulier pour la fonction $f(t)=\frac{1}{\sqrt{9-t}}$ car $\lim\limits_{x\longrightarrow 9^+}f(t)=+\infty$. Donc I est une intégrale généralisée de 2^{nd} espèce.

$$I=\lim_{x\longrightarrow 9^+}\int_2^x\frac{dt}{\sqrt{9-t}}=\lim_{x\longrightarrow 9^+}\left[-2\sqrt{9-t}\right]_2^x=2\sqrt{7},$$

d'où I converge.

Exemple 8
Soit $I=\int_0^1\frac{dt}{t}$est une intégrale de 2^{nd} espèce car $t=0$ est un point singulier pour la fonction $f(t)=\frac{1}{t}$. Donc

$$I=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\int_x^1\frac{dt}{t}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}(-\ln x)=+\infty,$$

d'où I diverge.

Exemple 9
Soit $\alpha > 0$, $I_1 = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$est une intégrale impropre de 2^{nd} espèce car a est un point singulier.

$$I = \lim_{x \longrightarrow a^+} \int_x^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} [\ln(b-a) - \ln(b-x)] & = +\infty \quad \text{si } \alpha = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a^+} \left[\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right] & = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \succ 1 \\ \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \prec 1 \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi

$$I_1 = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge si } \alpha < 1 \\ \text{diverge si } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

cette intégrale est dite de **Riemann** de second espèce.
Idem pour $I_2 = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$.

Remarques :

— S'il existe au moins un point singulier $c \in (a, b)$ et l'une des bornes (ou les deux) est infinie, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ est une intégrale impropre dite mixte. Dans ce cas l'intégrale s'écrit comme somme d'intégrales généralisées de $1^{ère}$ espèce et d'intégrales généralisées de 2^{nd} espèce, elle converge si toutes ces intégrales convergent et diverge si l'une au moins diverge.

— Si $\int_I f(t)\, dt$ et $\int_I g(t)\, dt$ sont des intégrales impropres, alors $\int_I f(t)\, dt$ et $\int_I g(t)\, dt$ convergent $\Longrightarrow \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$ converge.

— Si $\int_I f(t)\, dt$ converge et $\int_I g(t)\, dt$ diverge $\Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R}^*$, $\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$ diverge.

— Si $\int_I f(t)\, dt$ et $\int_I g(t)\, dt$ divergentt, alors on ne peut rien conclure sur la nature de l'intégrale $\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$.

Exemple 10
Soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$,

Cette intégrale est définie comme une somme de deux limite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt + \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

Exemple 11
Soient $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$, I et J sont divergentes. Mais :

$$I + J = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x(x+1) = +\infty, \text{ donc } I + J \text{ diverge.}$$

$$I - J = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x+1} + \ln 2 = \ln 2, \text{ donc } I - J \text{ converge.}$$

Exemple 12
Soit l'intégrale

$$\begin{aligned} I = \int_2^{+\infty} \frac{2}{1-t^2} dt &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_2^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_2^x \\ &= -\ln 3 \end{aligned}$$

Mais $\int_2^x \frac{1}{1+t} dt$ et $\int_2^x \frac{1}{1-t} dt$ divergent (intégrales de Riemann).

1.3 Calcul des intégrales généralisées

1.3.1 Utilisation d'un changement de variable

Théorème : Soit φ une bijection de classe C^1 de l'intervalle (α, β) sur l'intervalle (a, b), alors : $\int_a^b f(u) du$ et $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t)\, dt$ sont de même nature, si elles convergent elles sont égales.

Exemple 13
$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt = \left\{ \begin{array}{c} t = e^u \\ dt = e^u du \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u}$ intégrale de Riemann divergente.

Exemple 14
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+3} = \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{1+t}{\sqrt{2}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}} du \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

1.3.2 Intégration par parties

Proposition : Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[a,\ b[$ telles que la fonction fg admet une limite finie en b. Alors : $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \lim_{x\longrightarrow b} f(s)\,g(x) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Exemple 15

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x} + 1\right] = 1.$$

Exemple 16

$$\int_0^1 \ln t dt = \lim_{x\longrightarrow 0^+}\int_x^1 \ln t dt = \lim_{x\longrightarrow 0^+}[-x\ln x - 1 + x] = -1.$$

2 Critères de convergence pour les fonctions positives

Dans ce paragraphe, nous allons affirmer que certains intégrales généralisées convergent, tout en étant, en général, incapable de les calculer explicitement. En fait, tout les résultats définis ci-dessus sont les mêmes si la fonction est négative sur l'intervalle d'intégration (il suffit de remplacer f par $(-f)$).

2.1 problème d'extrémité supérieure b

Théorème 1
Soit f une fonction continue positive ou nulle sur l'intervalle $[a,\ b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \in]a,\ b[\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur$]a,\ b[$.

Exemple 17
Soit $I = \int_0^1 \sin^2 \frac{1}{t}dt$ est une intégrale de 2^{nd} espèce (0 est le point singulier). $F(x) = \int_x^1 \sin^2 \frac{1}{t}dt \le \int_x^1 dt = 1 - x < 1$, donc I converge.

2.2 Critère de comparaison

Soient f et g deux fonctions positives définies sur $[a, b[$ dont on suppose les intégrales impropres en b. Nous allons donner un critère de comparaison, comparable à celui donné pour les séries à termes positifs, permettant de conclure dans une majorité de cas.

Théorème 2
On suppose que $\forall x \in\ [a, b[: 0 \le f(x) \le g(x)$, alors

$$\textit{Si} \int_a^b g(t)dt \textit{ converge alors} \int_a^b f(t)dt \textit{ converge.}$$

$$\textit{et si} \int_a^b f(t)dt \textit{ diverge alors} \int_a^b g(t)dt \textit{ diverge}$$

Exemple 18
L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$ est une intégrale généralisée convergente, en effet : $\forall\ t \in [1,\ +\infty[$, on a

$$0 \le \frac{\sin^2 t}{t^2} \le \frac{1}{t^2}$$

et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann de $1^{ère}$ espèce convergente alors I converge.

Exemple 19
L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ est une intégrale de second espèce convergente. Les fonctions $t \longmapsto f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$ et $t \longmapsto g(t) = \ln t$ sont négatives ou nulle sur $]0,\ 1[$ et on a : $0 \le -f(t) \le -g(t)$ sur cet intervalle. On sait que $\int_0^1 \ln t dt = -1$ donc converge, ce qui implique que I converge aussi.

2.3 Critère d'equivalence

Onrappelle la définition d'un équivalent en un point b (qui peut etre l'infini) pour deux fonctions f et g

$$f \sim_b g \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Théorème 3
Soient$f$, g deux fonctions continues de $[a, b[\to \mathbb{R}_+$ véerifiant $f \sim_b g$.

$$\textit{Alors les intégrales} \int_a^b g(t)dt et \int_a^b f(t)dt sont\ de\ même\ nature.$$

Exemple 20
L'itégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ est divergente, puis que $f(t) = \frac{\sin(t)}{t^2} \sim_0 \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$ Or, lintégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge.