Exercice 1 *Nature et calcul*

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes et calculer leur valeur dans le cas où elles convergent :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt \quad I_3 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{-2}{t}dt \quad I_5 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt \quad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt \quad I_6 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}dt$$

Exercice 2 *Nature et calcul*

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes et calculer leur valeur dans le cas où elles convergent :

$$I_1 = \int_0^1 t\ln(t)dt \quad I_2 = \int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}dt \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t}dt$$

Exercice 3 *Nature et changement de variable*

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes et calculer leur valeur dans le cas où elles convergent en utilisant le changement de variables proposé :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2}dt \quad (u = 1/t) \text{ et } I_2 = \int_0^1 \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t}}dt \quad (u = 1-t)$$

Exercice 4 *Nature et chv à partir d'une intégrale de référence*

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. A l'aide du CHV $u = \sqrt{t}$, montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

Exercice 5 *Critères de convergence*

Utiliser les critères de convergence ou divergence pour étudier la nature (on ne demande pas le calcul) des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt \quad I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}dt \quad I_5 = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t^2)}dt$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt \quad I_4 = \int_0^1 \frac{t^{3/2}}{\sqrt{1+t^2}-1}dt \quad I_6 = \int_1^2 \frac{1}{\ln(t)}dt$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{\ln(t)+3}{\sqrt{t}}dt \quad I_8 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt \quad I_9 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t}dt$$

Exercice 6 *Suite d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^ne^{-t}dt$.

1. En utilisant le critère de négligeabilité, montrer que cette intégrale converge quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la valeur de I_n.
5. A l'aide d'un changement de variables, montrer la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^ne^{-2u}du$.

Exercice 7 *Intégrales impropres et parité*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et calculer sa valeur.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

4. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ et en déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

Exercice 8 *Intégrales et DES*

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1}dt$.

1. Montrer que cette intégrale converge.
2. Trouver trois réels a, b et c tels que $\forall t > 0, \dfrac{t-1}{t^3+1} = \dfrac{at+b}{t^2-t+1} + \dfrac{c}{t+1}$, puis en déduire la valeur de cette intégrale.

Exercice 9 *Suite d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^3}dt$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{(\ln(t))^n}{t^3}$ et en déduire que I_n converge.
2. Calculer I_0 puis trouver une relation entre I_{n+1} et I_n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}}$.

Exercice 10 *Suite d'intégrales*

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. A l'aide d'un changement de variable adéquat, en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge et préciser sa valeur.
2. Conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge et préciser sa valeur.

Exercice 11 *Critères de convergence et changement de variable*

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3\ln(t)}{(1+t^2)^2} = 0$.

   En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ converge.
2. A l'aide du CHV $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que
$$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt = -\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt.$$
3. En déduire la convergence et la valeur de I.

Exercice 12 *La fonction gamma*

Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Vérifier que pour $x > 0$, cette intégrale est bien convergente. La fonction Γ (lire gamma (majuscule)) est bien définie.
2. Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$
4. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ à l'aide du changement de variable $t = u^2$.
5. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{7}{2})$.