مقيـــــاس: إحصـــــاء 1

المحور الرابع: مقاييــــــس النزعــة المركزيــــة

Caractéristiques de Tendance Centrale

تمهيد الفصل:

إن الباحث في الميدان الإحصائي لا يكتفي بجمع المعلومات وتبويبها وتمثيلها بيانيا فقط بل يحاول استعمال بعض العمليات والقوانين لكي يختصر هذه البيانات، ففي معظم الحالات معطيات السلسلة لها ميل نحو الانتشار حول قيمة مركزية، هذه الأخيرة تستعمل كخاصية تنوب عن باقي المعطيات، وهي تستعمل من أجل معرفة خصائص السلسلة ولمقارنتها مع سلاسل إحصائية أخرى.

ومن بين مقاييس النزعة المركزية لدينا: الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، المتوسط الهندسي، المتوسط التربيعي، والمتوسط التوافقي.

أولا/ الوسط الحسابي La Moyenne Arithmétique ($\overline{x}$)

1/ تعريف الوسط الحسابي: هو أشهر مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداماً، يرمز له بالرمز $\bar{x}$ ويمكن تعريفه على أنه مجموعة من القيم مقسوماً على عددها (معدل القيم).

2/ طرق حساب الوسط الحسابي: تختلف طرق حساب الوسط الحسابي من حالة إلى أخرى حسب طبيعة البيانات الإحصائية.

1.2/ حالة البيانات المنفصلة: نميز في هذه الحالة بين البيانات غير المتكررة والبيانات المتكررة.

1.1.2/ حالة البينات غير المتكررة (المفردة): يطلق عليه في هذه الحالة بالوسط الحسابي البسيط، فإذا كان لدينا القيم التالية: $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots x_n$ فان: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}$ وبصورة عامة:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{n}}$$

مثال 1: أحسب الوسط الحسابي للبيانات التالية:

$$Xi: \quad 10 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 20 \quad 50 \quad 52$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10+15+\dots+52}{7} = \frac{180}{7} = \mathbf{25,71}$$

2.1.2/ حالة البيانات المتكررة: يطلق عليه في هذه الحالة بالوسط الحسابي المرجح، فإذا كان لدينا القيم التالية: $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots x_n$ وتكراراتها على التوالي هي: $F_1, F_2, F_3, \dots\dots\dots F_n$ فإن الوسط الحسابي يســاوي: $\bar{x} = \frac{x_1\times F_1+x_2\times F_2+x_3\times F_3+\dots+x_n\times F_n}{F_1+F_2+F_3+\dots+F_n}$ وبصورة عامة:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{F_i X_i}}{\sum \boldsymbol{F_i}} = \sum \boldsymbol{Fr_i X_i}$$

مثال 2: أحسب الوسط الحسابي للبيانات التالية:

Xi	15	16	17	20	50	52
Fi	7	8	6	4	3	7

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} = \frac{(15\times7)+\dots+(52\times7)}{35} = \frac{929}{35} = \mathbf{26,54}$$

2.2/ حالة البيانات المتصلة: المقصود بالبيانات المتصلة هو تلك البيانات التي تعرض في شكل فئات، ويحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة بثلاثة طرق نستعرضها فيما يلي:

1.2.2/ الطريقة المباشرة: نستخدم في الطريقة المباشرة نفس القانون الخاص بالبيانات المنفصلة مع وجود تكرار مع استبدال قيم xi بقيم ci والتي تمثل قيم مراكز الفئات، ويصبح القانون كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i C_i}{\sum F_i} = \sum Fr_i C_i$$

2.2.2/ طريقة الوسط الفرضي: يحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\sum F_i w_i}{\sum F_i}$$

حيث: α يمثل الوسط الفرضي ويكون عادة مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار؛ w_i يمثل الانحرافات أو الفروقات بين مراكز الفئات والوسط الفرضي α أي أن: $w_i = c_i - \alpha$.

3.2.2/ طريقة الانحرافات المختصرة: يحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\sum F_i w'_i}{\sum F_i} \times k$$

حيث: α يمثل الوسط الفرضي، $w'_i = \frac{W_i}{K}$، k طول الفئة.

مثال 3: أحسب الوسط الحسابي بطرق مختلفة للبيانات التالية:

Classes	5 – 15	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55
F_i	4	18	25	22	14

الحل:

Classes	F_i	C_i	$F_i \times C_i$	W_i	$F_i \times W_i$	K	W'_i	$F_i \times W'_i$
5 – 15	4	10	40	-20	-80	10	-2	-8
15 – 25	18	20	360	-10	-180	10	-1	-18
25 – 35	25	30	750	0	0	10	0	0
35 – 45	22	40	880	10	220	10	1	22
45 - 55	14	50	700	20	280	10	2	28
$\sum$	**83**	-	**2730**	-	**240**	-	-	**24**

أ/ **الطريقة المباشرة:** $\bar{x} = \frac{\sum F_i \times c_i}{\sum F_i} = \frac{2730}{83} = 32{,}89$

ب/ **طريقة الوسط الفرضي:** بافتراض أن $\alpha = 30$ فإن: $Wi = Ci - \alpha$

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\sum F_i \times w_i}{\sum F_i} = 30 + \frac{240}{83} = \mathbf{32,89}$$

ج/ **طريقة الانحرافات المختصرة:** $W'_i = \frac{Wi}{K}$

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\sum F_i \times w'_i}{\sum F_i} \times k = 30 + \frac{24}{83} \times 10 = \mathbf{32,89}$$

3/ خصائص الوسط الحسابي:

- أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداما؛
- المتوسط الحسابي قابل للعمليات الجبرية ولا يمكن حسابه بيانيا؛

- يتأثر بالقيم المتطرفة (القيم المتطرفة هي القيم الواقعة في طرفي مجال الدراسة)؛
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة من البداية و/أو النهاية وذلك لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات.

ثانيا/ المنـوال (Mo) Le Mode

1/ تعريف المنوال: هو القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً بين قيم المشاهدات، ويمكن أن يكون للبيانات أكثر من منوال وإذا لم تتكرر القيم أو تكررت بنفس التكرار فلا وجود للمنوال، ويرمز له بالرمز Mo.

2/ طرق حساب المنوال: تختلف طرق حساب المنوال باختلاف طبيعة البيانات.

1.2/ البيانات المنفصلة:

- إذا لم تتكرر القيم فلا وجود للمنوال؛
- إذا تكررت القيم بنفس التكرارات فلا وجود للمنوال؛
- إذا تكرر أحد القيم أكبر من البقية فهناك منوال واحد؛
- إذا كان لقيمتين نفس التكرار وهو الأكبر فلمجموعة القيم منوالان.

مثال 4: حدد قيمة المنوال في كل حالة من الحالات التالية:

1، 2، 3، 4، 5، 6، 7	1، 1، 2، 2، 3، 3، 4، 4	1، 2، 3، 4، 5، 5، 7	1، 2، 4، 4، 5، 5، 6، 7
نلاحظ أنه لا وجود لأي تكرار ومنه لا يوجد منوال.	نلاحظ أن القيم تتكرر بنفس التكرار ومنه لا وجود للمنوال	نلاحظ أن القيمة 5 تتكرر أكثر من بقية القيم ومنه يوجد منوال واحد (Mo=5)	نلاحظ أن القيمتين 4 و5 تتكرران بنفس التكرار وهو الأكبر ومنه يوجد منوالان (Mo1=4) و (Mo2=5)

2.2/ البيانات المتصلة: يُمكن تحديد قيمة المنوال إما بالطريقة الحسابية أو بالطريقة البيانية.

1.2.2/ الطريقة الحسابية:

في الحالة التي تكون فيها البيانات على شكل فئات لا بد من تحديد الفئة المنوالية أولاً والتي تقابل أكبر تكرار. ويأخذ القانون الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{Mo = L_0 + \frac{(F_0 - F_1)}{(F_0 - F_1) + (F_0 - F_2)} \times K}$$

حيث: L_0: الحد الأدنى للفئة المنوالية؛ F_0: التكرار المطلق للفئة المنوالية؛ F_1: التكرار المطلق السابق للفئة المنوالية؛ F_2: التكرار المطلق اللاحق للفئة المنوالية؛ K: طول الفئة المنوالية.

مثال 5: أحسب المنوال للبيانات التالية:

Classes	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 - 50	50 – 60
F_i	5	10	25	20	15

الحل: الفئة المنوالية هي [30 – 40[لأنها تقابل أكبر تكرار ومنه:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0 - F_1)}{(F_0 - F_1) + (F_0 - F_2)} \times K = 30 + \frac{(25 - 10)}{(25 - 10) + (25 - 20)} \times 10 = \mathbf{37,5}$$

حالة خاصة: في حالة ما إذا كان أطوال الفئات غير متساوي يتم حساب المنوال باستخدام قيم التكرار المعدل (المصحح) عوض التكرار الأصلي، حيث: $F_i^* = \frac{F_i}{K}$.

مثال 6: أحسب المنوال في الحالة التالية:

Classes	10 – 20	20 – 50	50 – 70	70 – 110	110 – 120
F_i	10	15	30	60	20

الحل: من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوي ومنه لا بد من حساب التكرار المصحح قبل حساب المنوال.

Classes	10 – 20	20 – 50	50 – 70	70 – 110	110 – 120
F_i	10	15	30	60	20
K	10	30	20	40	10
F_i^*	1	0,5	1,5	1,5	2
$F_i^* \times 10$	10	5	15	15	20

نلاحظ قبل التعديل أن الفئة منوالية هي 70-110كونها تقابل أكبر تكرار من المنظور الخاطئ لكن بعد حساب التكرار المعدل - وبعد ضربه في المعامل الثابت (10) للتخلص من الفاصلة- تبين أن الفئة المنوالية هي 110-120:

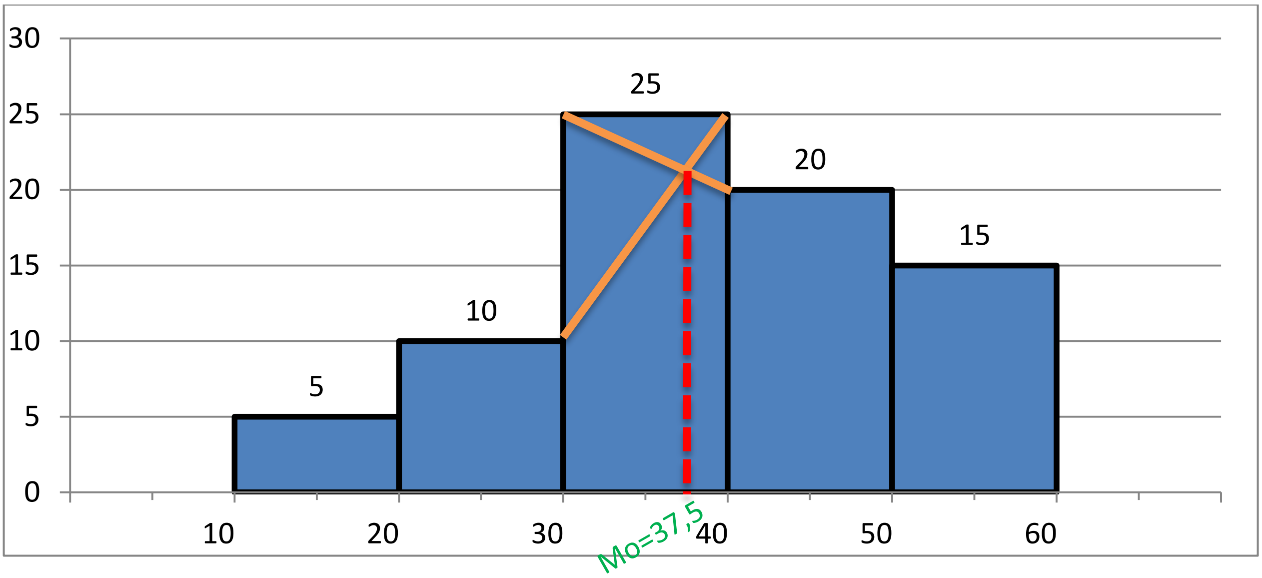
$$Mo = L_0 + \frac{(F_0^* - F_1^*)}{(F_0^* - F_1^*) + (F_0^* - F_2^*)} \times K = 110 + \frac{(20 - 15)}{(20 - 15) + (20 - 0)} \times 10 = \mathbf{112}$$

1.2.2/ الطريقة البيانية:

في حالة البيانات المتصلة يُمكن أيضا حساب المنوال بالطريقة البيانية بالاعتماد على المدرج التكراري

مثال 7: بالعودة لمعطيات المثال رقم 5حدد المنوال بيانياً

Classes	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 - 50	50 – 60
F_i	5	10	25	20	15



3/ خصائص المنوال:

- أسهل مقاييس النزعة المركزية تحديدا؛
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة؛
- يمكن حسابه بيانيا؛
- يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يعتبر أفضل مقياس لوصف الظواهر الكيفية (النوعية).

ثالثاً/ الوسيط La Médiane (Me)

1/ تعريف الوسيط: قيمة المتغير الإحصائي الذي يفصل السلسلة الإحصائية إلى قسمين متساويين بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً، أي هي المشاهدة التي تكون التكرارات التي تسبقها تساوي التكرارات التي تليها.

2/ طرق حساب الوسيط: تختلف طرق حساب الوسيط باختلاف طبيعة البيانات.

1.2/ البيانات المنفصلة: نميز هنا بين البينات المتكررة وغير المتكررة.

1.1.2/ البيانات غير المتكررة:

بداية نقوم بترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازليا ثم نحدد رتبة الوسيط Rme

- **إذا كان عدد القيم (n) فردياً:** $Rme = \frac{n+1}{2}$ تكون قيمة Me هي القيمة التي ترتيبها Rme.
- **إذا كان عدد القيم (n) زوجيا:** نحدد قيمتين للوسيط الأولى ترتيبها $Rme = \frac{n}{2}$ وهي M_1 والثانية ترتيبها $Rme = \frac{n}{2}+1$ وهي Me_2 وبالتالي قيمة الوسيط هي: $Me = \frac{Me_1+Me_2}{2}$

مثال 8: أحسب الوسيط لكل من:

السلسلة الأولى: 16، 5، 20، 10، 7، 2، 14.

السلسلة الثانية: 25، 10، 40، 27، 50، 37، 43، 16.

الحل:

السلسلة الأولى: 16، 5، 20، 10، 7، 2، 14. بعد الترتيب التصاعدي يصبح لدينا: 2، 5، 7، 10، 14، 16، 20. نلاحظ أن عدد المفردات فردي $(n = 7)$، رتبة الوسيط في هذه الحالة $Rme = \frac{n+1}{2} = 4$ أي أن الوسيط هي القيمة التي ترتيبها الرابع، ومنه: $Me = \mathbf{10}$

السلسلة الثانية: 25، 10، 40، 27، 50، 37، 43، 16. بعد الترتيب التصاعدي يصبح لدينا: 10، 16، 25، 27، 37، 40، 43، 50. نلاحظ أن عدد المفردات زوجي $(n = 8)$، معنى هذا أن الوسيط هو متوسط وسيطين الأول رتبته $Rme = \frac{n}{2} = 4$ أي أن $M_1 = 27$ والثاني رتبته $Rme = \frac{n}{2}+1 = 5$ أي أن $Me_2 = 37$ ومنه:

$$Me = \frac{Me_1 + Me_2}{2} = \frac{27+37}{2} = \mathbf{32}$$

2.1.2/ البيانات المتكررة:

إذا كانت البيانات منفصلة مع وجود التكرار نحدد رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum \mathrm{Fi}}{2}$ بين قيم التكرارات المتجمعة الصاعدة، القيمة المقابلة هي الوسيط.

مثال 9: بالنسبة لهذه البيانات المنفصلة إذا اردنا تحديد الوسيط يجب أولاً تحديد قيم Fcc ثم نحسب رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum \mathrm{Fi}}{2} = 45$

x_i	10	20	30	40	50	$\sum$
F_i	5	10	25	35	15	90
Fcc	0	5	15	40 Rme=45	75	90 -

نلاحظ أن قيمة Rme محصورة بين القيمتين 40 و 75 من قيم Fcc و هي تقابل القيمة 40 ومنه: $Me = 40$

ملاحظة: إذا كانت رتبة الوسيط Rme موجودة بين قيم التكرار المتجمع الصاعد Fcc فان الوسيط يكون متوسط القيمتين السابقة واللاحقة لرتبة الوسيط.

2.2/ البيانات المتصلة: يوجد ثلاثة طرق لحساب الوسيط في حالة البيانات المتصلة.

1.2.2/ بالاعتماد على قيم Fcc:

نجعل التوزيع التكراري توزيعاً صاعدا أي نحسب Fcc ثم نحدد رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum F_i}{2}$ ويستخدم ترتيب الوسيط في تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط وتدعى بالفئة الوسيطية ثم نحسب الوسيط باستخدام العلاقة التالية.

$$\boldsymbol{Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K}$$

حيث: L_0: الحد الأدنى للفئة الوسيطية، F_1: التكرار المتجمع الصاعد السابق لرتبة الوسيط، F_2: التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لرتبة الوسيط، K: طول الفئة الوسيطية.

ملاحظة: في حالة ما إذا كانت قيمة رتبة الوسيط تساوي قيمة من قيم Fcc فان الوسيط هو الحد الأعلى للفئة الوسيطية.

2.2.2/ بالاعتماد على قيم Fcd:

نجعل التوزيع التكراري توزيعاً نازلا أي نحسب Fcd ثم نحدد رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum F_i}{2}$ ويستخدم ترتيب الوسيط في تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط وتدعى بالفئة الوسيطية ثم نحسب الوسيط باستخدام العلاقة التالية.

$$\boldsymbol{Me = L_0 + \frac{F_2 - \frac{\sum F_i}{2}}{F_2 - F_1} \times K}$$

حيث: L_0: الحد الأدنى للفئة الوسيطية، F_1: التكرار المتجمع النازل اللاحق لرتبة الوسيط، F_2: التكرار المتجمع النازل السابق لرتبة الوسيط، K: طول الفئة الوسيطية.

3.2.2/ بالاعتماد على الرسم البياني:

الوسيط بيانيا هو نقطة تقاطع كل من المنحنى الممثل للتكرار المتجمع الصاعد (المنحنى التكاملي) والمنحنى الممثل للتكرار المتجمع النازل (المنحنى التفاضلي)، فالإسقاط العمودي لنقطة التقاطع بين المنحنيين على محور الفواصل يعطينا قيمة الوسيط، كما يمكن تحديده باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل فقط، ويكون ذلك من خلال تعيين رتبة الوسيط على محور التراتيب، وصورة هذه النقطة على محور الفواصل تعطينا قيمة الوسيط.

مثال 10: ليكن لدينا الجدول التكراري التالي:

Classes	160 – 180	180 – 200	200 – 220	220 - 240	240 – 260	260 – 280
$\boldsymbol{F_i}$	7	20	33	25	11	4

المطلوب: أحسب الوسيط بالطرق الرياضية والطريقة البيانية.

Classes	**160 – 180**	**180 – 200**	**200 – 220**	**220 - 240**	**240 – 260**	**260 – 280**
$\boldsymbol{F_i}$	**7**	**20**	**33**	**25**	**11**	**4**
$\boldsymbol{Fcc}$	0 7	27	Rme=50 60	85	96	100
$\boldsymbol{Fcd}$	100 93	73	Rme=50 40	15	4	0

أ/ حساب الوسيط بالاعتماد على قيم *Fcc*:

رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum F_i}{2} = 50$ نستنتج أن الفئة الوسيطية هي [200 – 220] ومنه:

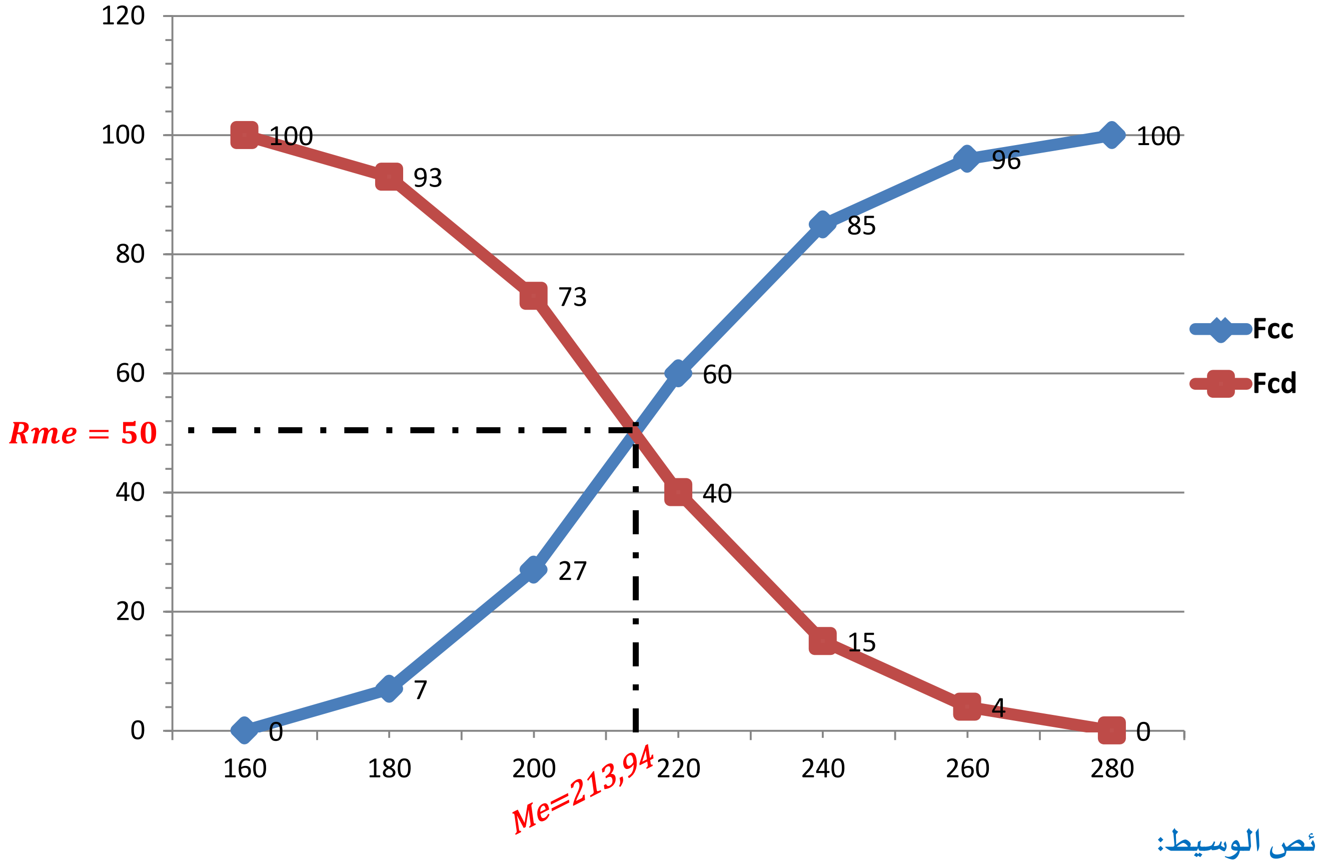
$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 200 + \frac{50 - 27}{60 - 27} \times 20 = \mathbf{213,94}$$

ب/ حساب الوسيط بالاعتماد على قيم *Fcd*:

رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum F_i}{2} = 50$ نستنتج أن الفئة الوسيطية هي [200 – 220] ومنه:

$$Me = L_0 + \frac{F_2 - \frac{\sum F_i}{2}}{F_2 - F_1} \times K = 200 + \frac{73 - 50}{73 - 40} \times 20 = \mathbf{213,94}$$

ج/ حساب الوسيط بالاعتماد على الرسم البياني:



3/ خصائص الوسيط:

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة؛
- يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يمكن حسابه بيانيا؛
- لا يدخل في حسابه جميع القيم ويتحدد بعدد البيانات وليس بقيمها.

رابعا/ المتوسط الهندسي La Moyenne Géométrique (G)

1/ تعريف المتوسط الهندسي: يستخدم هذا المتوسط لوصف ظاهرة حسب نسبة تغيرها، وخصوصا عندما يكون سلوك الظاهرة يتبع نمط المتتالية الهندسية، إذن المتوسط الهندسي هو عبارة عن الجذر النوني لجداء القيم x_i أو c_i.

2/ طرق حساب المتوسط الهندسي: نميز في حساب المتوسط الهندسي بين البيانات المنفصلة والمتصلة.

البيانات المتصلة	البيانات المنفصلة المتكررة	البيانات المنفصلة غير المتكررة
$logG = \frac{\sum F_i \log c_i}{\sum F_i} = \sum Fr_i \log c_i \Rightarrow G = 10^{logG}$	$logG = \frac{\sum F_i \log x_i}{\sum F_i} = \sum Fr_i \log x_i \Rightarrow G = 10^{logG}$	$logG = \frac{\sum \log x_i}{n} \Rightarrow G = 10^{logG}$ أو $G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \dots x_n}$

مثال 11: ليكن لدينا البيانات التالية: 2، 3، 5، 8، 10. المتوسط الهندسي لهذه القيم هو:

$$G = \sqrt[5]{2 \times 3 \times 5 \times 8 \times 10} = \mathbf{4,74}$$

$$logG = \frac{log2 + log3 + log5 + log8 + log10}{5} = \frac{0,30 + 0,48 + 0,70 + 0,90 + 1}{5}$$

$$= 0,676 \Rightarrow G = 10^{logG} = 10^{0,676} = \mathbf{4,74}$$

خامسا/ المتوسط التو افقي La Moyenne Harmonique (H)

1/ تعريف المتوسط التو افقي: هو مقلوب المتوســـط الحسابي لمقلوب القيم i أو c_i، ويُستخدم المتوسط التوافقي في حالة إذا كان المتوسط المدروس عبارة عن حاصل قسمة متغيرين آخرين مثل السرعة، الكثافة السكانية.

2/ طرق حساب المتوسط التو افقي: نميز في حساب المتوسط التوافقي بين البيانات المنفصلة والمتصلة.

البيانات المنفصلة غير المتكررة	البيانات المنفصلة المتكررة	البيانات المتصلة
$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$	$H = \frac{\sum F_i}{\sum \frac{F_i}{x_i}}$	$H = \frac{\sum F_i}{\sum \frac{F_i}{c_i}}$

مثال 12: سيارة تقطع مسافة 200 كلم بسرعة 50 كلم/ساعة وتقطع مسافة 100 كلم بسرعة 100 كلم/ساعة. المطلوب: ما هو متوسط سرعة السيارة خلال مسارها؟

X_i	F_i
50	200
100	100
$\sum$	300

$$H = \frac{\sum F_i}{\sum \frac{F_i}{x_i}} = \frac{300}{\frac{200}{50} + \frac{100}{100}} = \frac{300}{5} = 60\ km/h$$

سادسا/ المتوسط التربيعي La Moyenne Quadratique (MQ)

1/ تعريف المتوسط التربيعي: هو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات القيم x_i أو c_i.

2/ طرق حساب المتوسط التربيعي: نميز في حساب المتوسط التربيعي بين البيانات المنفصلة والمتصلة.

البيانات المنفصلة غير المتكررة	البيانات المنفصلة المتكررة	البيانات المتصلة
$MQ = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$	$MQ = \sqrt{\frac{\sum F_i x_i^2}{\sum F_i}} = \sqrt{\sum Fr_i x_i^2}$	$MQ = \sqrt{\frac{\sum F_i c_i^2}{\sum F_i}} = \sqrt{\sum Fr_i c_i^2}$

مثال 13: حدد قيمة المتوسط الربيعي للجدول التكراري التالي:

Classes	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 – 10	10 – 12
F_i	4	3	2	3	4

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum F_i c_i^2}{\sum F_i}} = \sqrt{\frac{4 \times 3^2 + 3 \times 5^2 + 2 \times 7^2 + 3 \times 9^2 + 4 \times 11^2}{16}} = \sqrt{\frac{936}{16}} = \sqrt{58,5}$$

$$= \mathbf{7,65}$$