مقياس: إحصاء 1

المحور السادس: مقاييس الشكل

تمهيد الفصل:

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام تعطي فكرة عن خصائص توزيع هذه البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها، فإن هذا الوصف تبقى تنقصه الدقة المطلوبة للتعرف على خواص التوزيع خاصة فيما يخص انتشار البيانات على المنحنى البياني الممثل لها من حيث التوائه وتفرطحه عن الوضع الطبيعي.

إن الحاجة لمعرفة كيفية انتشار البيانات وتوزيعها تدفعنا لحساب معاملات تعطينا التقديرات الكمية إما للالتواء (معامل الالتواء) أو التفرطح (معامل التفرطح). وهذا بدوره يتطلب معرفة كيفية حساب ما يُعرف بالعزوم.

1. العزوم Les Moments

العزوم عبارة عن قيم احصائية تكون حول نقطة البدء (الصفر) أو حول المتوسط الحسابي $(\bar{x})$، أما رتبة العزم فتتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن الصفر أو المتوسط الحسابي، وعلى هذا الأساس نميز نوعان من العزوم: العزوم اللامركزية والعزوم المركزية.

والعبارة العامة للعزوم هي:

$$\frac{\sum F_i(x_i-b)^r}{\sum F_i}=\sum Fr(x_i-b)^r\ ;\qquad b=0\ ou\ \bar{x}$$

1.1 العزوم اللامركزية (m_r): عبارة عن قيمة إحصائية من الرتبة r حيث $r\in N$ تتمركز حول الصفر (0) وتختلف طرق حساب العزم اللامركزي باختلاف طبيعة البيانات.

- البيانات المنفصلة غير المتكررة:

$$m_r=\frac{\sum x_i^r}{n}$$

وتكون العزوم اللامركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$m_1=\frac{\sum x_i^1}{n}=\bar{x}\qquad m_2=\frac{\sum x_i^2}{n}=(MQ)^2\qquad m_3=\frac{\sum x_i^3}{n}\qquad m_4=\frac{\sum x_i^4}{n}$$

- البيانات المنفصلة المتكررة:

$$m_r=\frac{\sum F_i x_i^r}{\sum F_i}=\sum Fr\times x_i^r$$

وتكون العزوم اللامركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$m_1=\frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}=\bar{x}\qquad m_2=\frac{\sum F_i x_i^2}{\sum F_i}=(MQ)^2\qquad m_3=\frac{\sum F_i x_i^3}{\sum F_i}\qquad m_4=\frac{\sum F_i x_i^4}{\sum F_i}$$

- البيانات المتصلة:

$$m_r=\frac{\sum F_i c_i^r}{\sum F_i}=\sum Fr\times c_i^r$$

وتكون العزوم اللامركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$m_1=\frac{\sum F_i c_i}{\sum F_i}=\bar{x}\qquad m_2=\frac{\sum F_i c_i^2}{\sum F_i}=(MQ)^2\qquad m_3=\frac{\sum F_i c_i^3}{\sum F_i}\qquad m_4=\frac{\sum F_i c_i^4}{\sum F_i}$$

مثال 1: أحسب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى للبيانات التالية:

Classes	1 - 3	3 – 5	5 – 7	7 – 9	9 – 11
f_i	5	4	2	3	6

$Classes$	F_i	c_i	$F_i \times c_i$	c_i^2	$F_i \times c_i^2$	c_i^3	$F_i \times c_i^3$	c_i^4	$F_i \times c_i^4$
1 - 3	5	2	10	4	20	8	40	16	80
3 - 5	4	4	16	16	64	64	256	256	1024
5 - 7	2	6	12	36	72	216	432	1296	2592
7 - 9	3	8	24	64	192	512	1536	4096	12288
9 - 11	6	10	60	100	600	1000	6000	10000	60000
$\sum$	**20**	-	**122**	-	**948**	-	**8264**	-	**75984**

$$m_1 = \frac{\sum F_i c_i}{\sum F_i} = \bar{x} = \frac{122}{20} = \mathbf{6,1} \qquad m_2 = \frac{\sum F_i c_i^2}{\sum F_i} = \frac{948}{20} = \mathbf{47,4}$$

$$m_3 = \frac{\sum F_i c_i^3}{\sum F_i} = \frac{8264}{20} = \mathbf{413,2} \qquad m_4 = \frac{\sum F_i c_i^4}{\sum F_i} = \frac{75984}{20} = \mathbf{3799,2}$$

2.1 العزوم المركزية (μ_r): عبارة عن قيمة إحصائية من الرتبة r حيث $r \in N$ تتمركز حول الوسط الحسابي $(\bar{x})$ وتختلف طرق حساب العزم اللامركزي باختلاف طبيعة البيانات.

- البيانات المنفصلة غير المتكررة:

$$\mu_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r}{n}$$

وتكون العزوم المركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$\mu_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^1}{n} = 0 \quad \mu_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \sigma_x^2 \quad \mu_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \mu_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

-البيانات المنفصلة المتكررة:

$$\mu_r = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^r}{\sum F_i} = \sum Fr (x_i - \bar{x})^r$$

وتكون العزوم المركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum F_i} = \sigma_x^2 \quad \mu_3 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^3}{\sum F_i} \quad \mu_4 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^4}{\sum F_i}$$

- البيانات المتصلة:

$$\mu_r = \frac{\sum F_i (c_i - \bar{x})^r}{\sum F_i} = \sum Fr (c_i - \bar{x})^r$$

وتكون العزوم المركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \frac{\sum F_i (c_i - \bar{x})^2}{\sum F_i} = \sigma_x^2 \quad \mu_3 = \frac{\sum F_i (c_i - \bar{x})^3}{\sum F_i} \quad \mu_4 = \frac{\sum F_i (c_i - \bar{x})^4}{\sum F_i}$$

مثال 2: بالعودة إلى المثال 1 أحسب العزوم المركزية الاربعة الأولى

الحل: وجدنا قيمة الوسط الحسابي: $\bar{x} = 6,1$

$Classes$	F_i	c_i	$c_i - \bar{x}$	$(c_i - \bar{x})^2$	$F_i(c_i - \bar{x})^2$	$(c_i - \bar{x})^3$	$F_i(c_i - \bar{x})^3$	$(c_i - \bar{x})^4$	$F_i(c_i - \bar{x})^4$
1 - 3	5	2	-4,1	16,81	84,05	-68,921	-344,61	282,576	1412,881
3 - 5	4	4	-2,1	4,41	17,64	-9,261	-37,04	19,448	77,792
5 - 7	2	6	-0,1	0,01	0,02	-0,001	-0,002	0,0001	0,0002
7 - 9	3	8	1,9	3,61	10,83	6,859	20,58	13,032	39,096
9 - 11	6	10	3,9	15,21	91,26	59,319	355,91	231,344	1388,065
$\sum$	**20**	-	-	-	203,8	-	-5,16	-	2917,834

$$\mu_1 = \mathbf{0} \qquad \mu_2 = \frac{\sum F_i(c_i - \bar{x})^2}{\sum F_i} = \delta_x^2 = \frac{203{,}8}{20} = \mathbf{10{,}19} \Rightarrow \delta_x = \sqrt{10{,}19} = 3{,}19$$

$$\mu_3 = \frac{\sum F_i(c_i - \bar{x})^3}{\sum F_i} = \frac{-5{,}16}{20} = \mathbf{-0{,}258} \qquad \mu_4 = \frac{\sum F_i(c_i - \bar{x})^4}{\sum F_i} = \frac{2917{,}834}{20} = \mathbf{145{,}89}$$

3.1 العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم اللامركزية:

يمكن حساب قيم العزوم المركزية بالاعتماد على العزوم اللامركزية من خلال العلاقات التالية:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

مثال3: بالعودة لبيانات المثال 1 أحسب العزوم المركزية بالاعتماد على العزوم اللامركزية.

في المثال (5-2) تحصلنا على النتائج التالية:

$$m_1 = 6{,}1 \qquad m_2 = 47{,}4 \qquad m_3 = 413{,}2 \qquad m_4 = 3799{,}2$$

$$\mu_1 = \mathbf{0}$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 47{,}4 - (6{,}1)^2 = \mathbf{10{,}19}$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = 413{,}2 - 3(6{,}1)(47{,}4) + 2(6{,}1)^3 = \mathbf{-0{,}258}$$

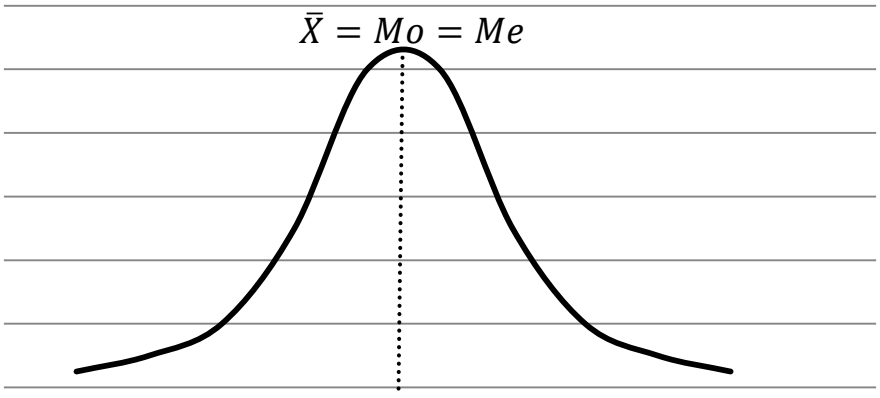
$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4 = 3799{,}2 - 4(6{,}1)(413{,}2) + 6(6{,}1)^2(47{,}4) - 3(6{,}1)^4$$
$$= 3799{,}2 - 10082{,}08 + 10582{,}524 - 4153{,}7523 = \mathbf{145{,}89}$$

الملاحظ أن نفس النتائج تحصلنا عليها في المثال 2 لما قمنا بحساب العزوم المركزية بالاعتماد على القانون المباشر.

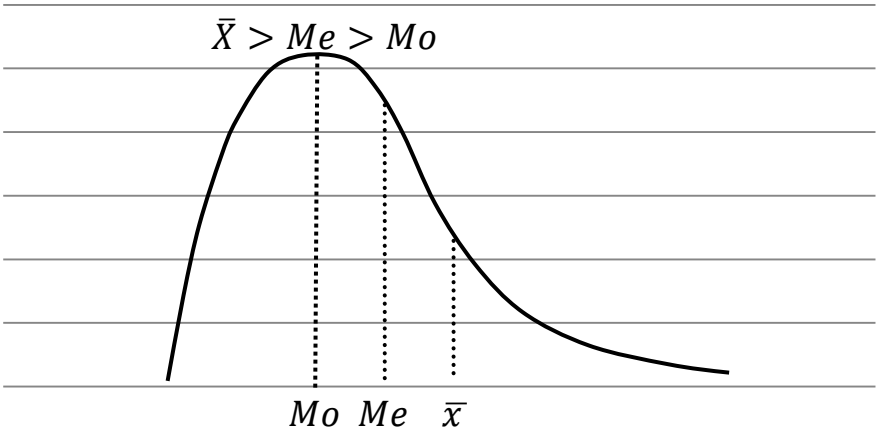
2 معامل الالتواء L'Asymétrie

يقيس الالتواء (Skewness) درجة تماثل البيانات حول وسطها الحسابي، وبالتالي يتم تحديد شكل المنحنى الممثل للتوزيع التكراري للعينة المدروسة. فقد يكون التوزيع التكراري:

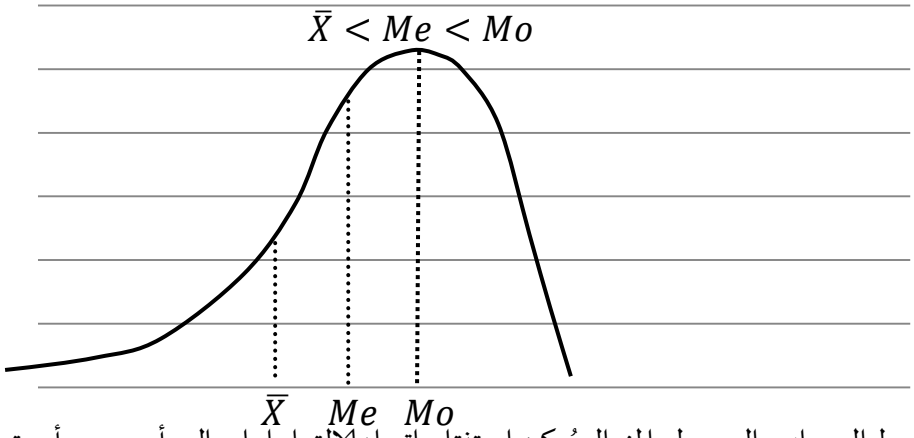
- متماثلاً (متناظر): في هذه الحالة يكون $\bar{X} = Mo = Me$ أي تكون 50% من القيم على يمين هذه المقاييس و50% المتبقية على يسارها، ويشبه شكل المنحنى البياني المتماثل شكل الجرس.



- موجب الالتواء: يكون المنحنى الممثل للتوزيع التكراري ممتدا أكثر نحو اليمين ويكون في هذه الحالة $\bar{X} > Me > Mo$ أي أن عدد القيم على يمين المنوال أكبر من عددها على يساره.



- سالب الالتواء: يكون المنحنى الممثل للتوزيع التكراري ممتدا أكثر نحو اليسار ويكون في هذه الحالة $\bar{X} < Me < Mo$ أي أن عدد القيم على يسار المنوال أكبر من عددها على يمينه.



من خلال مقارنة قيم الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال يُمكن استنتاج اتجاه الالتواء أما سالب أو موجب أو متماثل، كما يُمكن معرفة ذلك أيضاً من خلال حساب معامل الالتواء Le coefficient d'asymétrie ويُحسب معامل الالتواء بثلاثة طرق واحدة دقيقة واثنتان تقريبيتان.

1.2 الطريقة الدقيقة: يُطلق على معامل الالتواء في هذه الحالة اسم: معامل فيشر للالتواء Coefficient de Fisher ويُعبر عنه رياضياً بالعلاقة التالية:

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

2.2 الطرق التقريبية:

1.2.2 معامل بيرسون للالتواء: Coefficient de Pearson إذا كان التوزيع متماثل يكون لدينا $\bar{X} = Mo = Me$ أما إذا كان التوزيع قريب من التماثل (ملتوي) تصبح هذه المتوسطات غير متساوية وانطلاقاً من هذه الفكرة نستنتج طريقة حساب معامل بيرسون للالتواء وفقاً للعلاقتين التاليين:

- معامل بيرسون الأول للالتواء: $\gamma_1 = \frac{\bar{x}-M_o}{\sigma_x}$
- معامل بيرسون الثاني للالتواء: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{x}-M_e)}{\sigma_x}$

2.2.2 معامل يول للالتواء: Coefficient de Yule في حالة التوزيعات المفتوحة يتعذر علينا حساب معامل بيرسون للالتواء، وفي هذه الحالة يمكن حساب معامل الالتواء بالاعتماد على الربيعيات ويسمى معامل الالتواء الربيعي أو معامل يول للالتواء وفقاً للعلاقة التالية:

$$\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

ملاحظة: باستخدام إحدى المعاملات السابقة نجد:

- إذا كانت إشارة معامل الالتواء موجبة، يكون التوزيع ملتوياً إلى اليمين.

- إذا كانت إشارة معامل الالتواء سالبة، يكون التوزيع ملتوياً إلى اليسار.
- إذا كان معامل الالتواء معدوماً، يكون التوزيع متماثل.

مثال 4: أحسب معامل الالتواء بالطريقة الدقيقة والطرق التقريبية لبيانات الجدول التكراري وماذا تستنتج:

Classes	10 - 20	20 – 40	40 - 50	50 – 60	60 – 80	80 - 90	90 – 100
F_i	20	80	10	20	40	20	10

بداية يجب حساب كل من الوسط الحسابي، الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثاني، المنوال والعزوم.

$Classes$	F_i	c_i	$F_i \times c_i$	Fcc	$F_i^* = \frac{F_i}{K}$
10 - 20	20	15	300	20	2
20 - 40	80	30	2400	100	4
40 - 50	10	45	450	110	1
50 - 60	20	55	1100	130	2
60 - 80	40	70	2800	170	2
80 - 90	20	85	1700	190	2
90 - 100	10	95	950	200	1
$\sum$	**200**	-	**9700**	-	-

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i c_i}{\sum F_i} = \frac{9700}{200} = \mathbf{48,5}$$

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 20 + \frac{100 - 20}{100 - 20} \times 20 = \mathbf{40}$$

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k = 20 + \frac{50 - 20}{100 - 20} \times 20 = \mathbf{27,5}$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k = 60 + \frac{150 - 130}{170 - 130} \times 20 = \mathbf{70}$$

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0^* - F_1)}{(F_0^* - F_1^*) + (F_0^* - F_2^*)} \times k = 20 + \frac{(4-2)}{(4-2)+(4-1)} \times 20 = \mathbf{28}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum F_i (c_i - \bar{x})^2}{\sum F_i} = \frac{117550}{200} = 587,75 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{587,75} = 24,24$$

$$\mu_3 = \frac{\sum F_i (c_i - \bar{x})^3}{\sum F_i} = \frac{1122150}{200} = 5610,75$$

$$\mu_4 = \frac{\sum F_i (c_i - \bar{x})^4}{\sum F_i} = \frac{125394962,5}{200} = 626974,81$$

$Classes$	F_i	c_i	$c_i - \bar{x}$	$(c_i - \bar{x})^2$	$F_i(c_i - \bar{x})^2$	$(c_i - \bar{x})^3$	$F_i(c_i - \bar{x})^3$	$(c_i - \bar{x})^4$	$F_i(c_i - \bar{x})^4$
10 - 20	20	15	-33,5	1122,25	22445	-37595,38	-751907,5	1259445,06	25188901,25
20 - 40	80	30	-18,5	342,25	27380	-6331,63	-506530	117135,06	9370805
40 - 50	10	45	-3,5	12,25	122,5	-42,88	-428,75	150,06	1500,625
50 - 60	20	55	6,5	42,25	845	274,63	5492,5	1785,06	35701,25
60 - 80	40	70	21,5	462,25	18490	9938,38	397535	213675,06	8547002,5
80 - 90	20	85	36,5	1332,25	26645	48627,13	972542,5	1774890,06	35497801,25
90 - 100	10	95	46,5	2162,25	21622,5	100544,63	1005446,25	4675325,06	46753250,63
$\sum$	200	-	-	-	**117550**	-	**1122150**	-	**125394962,5**

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{5610,75}{(24,24)^3} = \mathbf{0,39} \qquad \gamma_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x} = \frac{48,5 - 28}{24,24} = \mathbf{0,86}$$

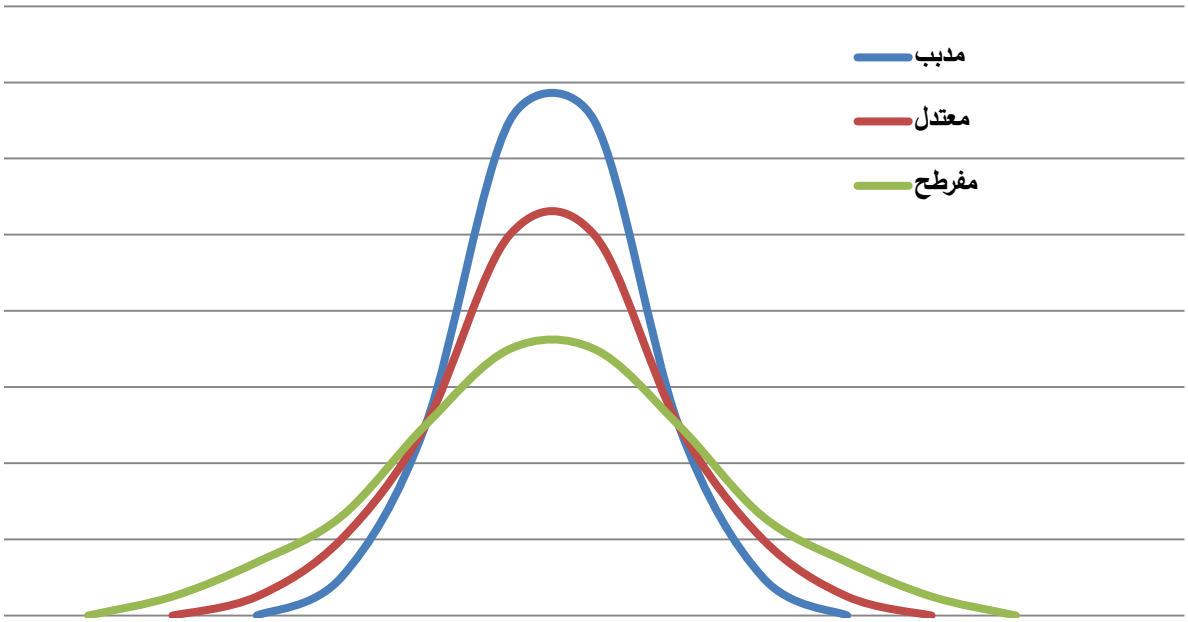
$$\gamma_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x} = \frac{3(48,5 - 40)}{24,24} = \mathbf{1,05}$$

$$\gamma_3 = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{70 + 27{,}5 - 2 \times 40}{70 - 27{,}5} = \mathbf{0,41}$$

الاستنتاج: بما أن إشارة معامل الالتواء موجبة رغم أنه محسوب بطرق مختلفة نستنتج أن التوزيع موجب الالتواء (يمتد نحو اليمين).

3 معامل التفرطح L'Aplatissement

يقيس التفرطح (Kurtosis) درجة التحدب في منحنى التوزيع التكراري، فإذا كان التوزيع محدباً في قمته يُقال أنه حاد (مدبب) القمة وإذا كان منبسط القمة يقال عنه أنه مفرطح القمة وفي حالة أخرى يكون التوزيع معتدل (متوسط التفرطح) ويسمى بالتوزيع المتماثل (الطبيعي). ويمكن توضيح الحالات الثلاثة لاعتدال أو تدبب أو تفرطح قمة التوزيع في الشكل التالي:



يُقاس التفرطح بأداة احصائية تسمى معامل التفرطح Coefficient d'aplatissement وتُحسب قيمته بالطريقة التالية:

$$K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4}$$

- إذا كان $K = 3$ فإن التوزيع يكون معتدل (متماثل القمة)؛
- إذا كان $K < 3$ فإن التوزيع يكون مفرطح القمة؛
- إذا كان $K > 3$ فإن التوزيع يكون مدبب القمة.

مثال 5: بالعودة إلى بيانات المثال 4 أحسب معامل التفرطح وماذا تستنتج؟

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = \frac{626974{,}81}{(24{,}24)^4} = \frac{626974{,}81}{345247{,}44} = \mathbf{1,82}$$

بما أن $K < 3$ نستنتج أن التوزيع مفرطح القمة.