On précise dans tous les exercices que la fonction est continue sur l'intervalle puis on précise où elle est impropre.

On n'oublie pas également de préciser son signe notamment lorsqu'on utilise les critères pour déterminer sa nature.

Exercice 1

Étudions la nature des intégrales impropres suivantes et calculons leur valeur dans le cas où elles convergent.

$I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ avec $f(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$. I_1 est doublement impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Étudions $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
  Soit $x \geqslant 0$.
  $$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= -\frac{1}{2}\left[(1+t^2)^{-1}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$
  Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
- Étudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$.
  Soit $x \leqslant 0$.
  $$\begin{aligned}\int_x^0 f(t)dt &= -\frac{1}{2}\left[(1+t^2)^{-1}\right]_x^0 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$
  Or, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge et vaut $-\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, I_1 converge et vaut 0.

$I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ avec $f(t) = te^{-t^2}$.

f est continue sur $\mathbb{R}^+$. I_2 est impropre en $+\infty$.

Soit $x \geqslant 0$,

$\displaystyle\int_0^x te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc I_2 converge et $I_2 = \dfrac{1}{2}$.

$I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{-2}{t}dt$

I_3 est impropre en $-\infty$ et $\forall x \leqslant -1, \displaystyle\int_x^{-1} \frac{-2}{t}dt = [-2\ln|t|]_x^{-1} = -2\ln(-x)$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-2\ln(-x)) = -\infty$ donc I_3 diverge.

$I_4 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$

La fonction $t \to e^{-|t|}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$.

Il suffit d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt$.

Soit $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-|t|}dt = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1$.
Ainsi, I_4 converge et $I_4 = 2$.
$I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$
Cette intégrale est impropre en 1.
Soit $x > 1$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = \left[2\sqrt{t-1}\right]_x^2 = 2 - 2\sqrt{x-1}$.
$\displaystyle\lim_{x\to 1}(2-2\sqrt{x-1}) = 2$ donc I_5 converge et $I_5 = 2$.
$I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}dt$
Cette intégrale est impropre en 0.
Soit $x > 0$, $\displaystyle\int_x^1 \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_x^1 = \frac{1}{2}(-\ln(x))$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-\ln(x)) = -\infty$ donc I_6 diverge.

Exercice 2

Étudions la nature des intégrales impropres suivantes et calculons leur valeur dans le cas où elles convergent :
$I_1 = \displaystyle\int_0^1 t\ln(t)dt$
Cette intégrale est impropre en 0.
Soit $x \in]0;1]$. Déterminons $\displaystyle\int_x^1 t\ln(t)dt$.
Soient $\begin{array}{ll} u'(t) = t & v(t) = \ln(t) \\ u(t) = \dfrac{t^2}{2} & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}$
u et v sont de classe C^1 sur $[x;1]$ donc par IPP, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^1 t\ln(t)dt &= \left[\frac{t^2}{2}\times\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}dt \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$ par CC donc I_1 converge et $I_1 = -\dfrac{1}{4}$.
$I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2}dt$
Cette intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $x \geqslant 0$. Déterminons $\displaystyle\int_0^x t^3e^{-t^2}dt$.
Soient $\begin{array}{ll} u'(t) = te^{-t^2} & v(t) = t^2 \\ u(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-t^2} & v'(t) = 2t \end{array}$
u et v sont de classe C^1 sur $[0;x]$ donc par IPP, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^3e^{-t^2}dt &= \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\times t^2\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{2}e^{-t^2}\times 2tdt \\ &= -\frac{x^2}{2e^{x^2}} - \frac{1}{2}(e^{-x^2}-1)\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$ par CC donc I_1 converge et $I_1 = \dfrac{1}{2}$.

$I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t}dt$

Cette intégrale est doublement impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Étudions la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$.

  Soit $x \geqslant 0$. Déterminons $\displaystyle\int_0^{x} te^{-2t}dt$.

  Soient $\begin{array}{ll} u'(t) = e^{-2t} & v(t) = t \\ u(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-2t} & v'(t) = 1 \end{array}$

  u et v sont de classe C^1 sur $[0;x]$ donc par IPP, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-2t}dt &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\times t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{2}e^{-2t}dt \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}(e^{-2x}-1)\end{aligned}$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt = \frac{1}{4}$.

- Étudions la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} te^{-2t}dt$.

  Soit $x \leqslant 0$. Déterminons $\displaystyle\int_x^{0} te^{-2t}dt$.

  D'après l'étude précédente, on a :

  $\displaystyle\int_x^0 te^{-2t}dt = \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}(e^{-2x}-1)$.

  $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 te^{-2t}dt$ diverge.

Ainsi, I_3 diverge.

Exercice 3

Étudions la nature des intégrales impropres suivantes et calculons leur valeur dans le cas où elles convergent en utilisant le changement de variables proposé :

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2}dt \qquad (u = 1/t)$

I_1 est impropre en 0.

Soit $x \in]0;1]$.

Déterminons $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2}dt$.

- Si t varie de x à 1, alors u varie de $1/x$ à 1
- $u = 1/t \Rightarrow t = 1/u$
- $dt = -1/u^2 du$

$u \to 1/u$ est de classe C^1 sur $[1;1/x]$ donc le changement de variable est licite et on a :

$$\begin{aligned}\int_x^1 \frac{e^{-1/t}}{t^2}dt &= \int_{1/x}^1 \frac{e^{-u}}{1/u^2}\times\left(-\frac{1}{u^2}\right)du \\ &= \int_1^{1/x} e^{-u} \\ &= -e^{-1/x} + e^{-1}\end{aligned}$$

$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = \lim_{X\to -\infty} e^X = 0$ donc I_1 converge et $I_1 = e^{-1}$.

$I_2 = \int_0^1 \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t}}dt \qquad (u = 1-t)$

I_2 est impropre en 1.

Soit $x \in [0;1[$.

Déterminons $\int_0^x \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t}}dt$.

- Si t varie de 0 à x, alors u varie de 1 à $1-x$
- $u = 1-t \Rightarrow t = 1-u$
- $dt = -du$

$u \to 1-u$ est de classe C^1 sur $[1-x;1]$ donc le changement de variable est licite et on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t}}dt &= -\int_1^{1-x} \frac{2((1-u)^2+1}{\sqrt{u}} \times du \\
&= \int_{1-x}^1 \frac{2u^2-4u+3}{\sqrt{u}} \\
&= \int_{1-x}^1 2u^{3/2} - 4u^{1/2} + \frac{3}{\sqrt{u}}du \\
&= \left[\frac{4}{5}u^{5/2} - \frac{8}{3}u^{3/2} + 6\sqrt{u}\right]_{1-x}^1 \\
&= \frac{62}{15} - \sqrt{1-x}\left(\frac{4}{5}(1-x)^2 - \frac{8}{3}(1-x) + 6\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que I_2 converge et $I_2 = \frac{62}{15}$.

Exercice 4

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. A l'aide du CHV $u = \sqrt{t}$, montrons la convergence et calculons $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

L'intégrale est doublement impropre en 0 et en $+\infty$.

- Étudions $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

  Si t varie de 1 à x, alors u varie de 1 à $\sqrt{x}$.

  $u = \sqrt{t} \Rightarrow t = u^2$

  $dt = 2udu$

  $u \to u^2$ est de classe C^1 sur $[1;\sqrt{x}]$ donc le changement de variable est licite et on a :

  $\int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu = 2\int_1^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du.$

  D'après l'énoncé, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} e^{-u^2}du$ converge.

- Étudions $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

  Soit $x \in]0;1]$.

  En utilisant le même changement de variable, on a

  $\int_x^1 e^{-t^2}dt = 2\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-u^2}du.$

$u \to e^{-u^2}$ est définie et continue sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge vers $2\displaystyle\int_0^1 e^{-u^2}du$.

On en déduit ainsi que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

Après avoir montré la convergence (mais seulement après), on peut aussi conclure en utilisant le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{1/x}^{x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt\ldots$

Exercice 5

Utilisons les critères de convergence ou divergence pour étudier la nature (on ne demande pas le calcul) des intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

  $f_1 : t \to \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

  $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

  donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc il en est de même pour I_1.

- $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$

  $f_2 : t \to \dfrac{t^2}{1+t^4}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

  $\dfrac{t^2}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{t^4}$ i.e $\dfrac{t^2}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc il en est de même pour I_2.

- $I_3 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}dt$

  $f_3 : t \to \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}$ est continue et positive sur $[2;+\infty[$.

  $\forall t \geqslant 2, 0 < \ln(t) \leqslant \sqrt{t}$ donc $\frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{t}$.

  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge donc, par comparaison, il en est de même pour I_3.

- $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3/2}}{\sqrt{1+t^2}-1}dt$

  $f_4 : t \to \frac{t^{3/2}}{\sqrt{1+t^2}-1}$ est continue et positive sur $]0;1]$.

  $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{1/2} \times \frac{t^{3/2}}{\sqrt{1+t^2}-1} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1} = \lim_{X\to 0}\frac{X}{\sqrt{1+X}-1}$.

  Or, $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{\sqrt{1+X}-1}{X} = \frac{1}{2}$ car c'est la limite du taux de variation de la fonction $x \to \sqrt{1+x}$ en 0 i.e le nombre dérivé de cette fonction en 0.

  Ainsi, $\displaystyle\lim_{t\to 0} 2t^{1/2} \times f(t) = 1$ donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2t^{1/2}}$.

  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}dt$ converge donc il en est de même pour I_4.

- $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t^2)}dt$

  $f_5 : t \to \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t^2)}$ est continue et positive sur $]0;1]$.

  $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{3/2} \times \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t^2)} = \lim_{X\to 0} \frac{X}{\ln(1+X)} = 1$ donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$.

  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{3/2}}dt$ diverge donc il en est de même pour I_5.

- $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln(t)}dt$

  $f_6 : t \to \frac{1}{\ln(t)}$ est continue et positive sur $]1;2]$.
  Cette intégrale est impropre en 1.
  Effectuons tout d'abord un changement de variable pour nous ramener à une intégrale impropre en 0.
  Soit $u = t-1$, $du = dt$.
  $t \to t-1$ est C^1 sur $[x;2]$ pour tout $x \in]1;2]$ et on a :
  $\displaystyle\int_x^2 \frac{1}{\ln(t)}dt = \int_{x-1}^1 \frac{1}{\ln(u+1)}dt.$
  Ainsi, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln(t)}dt$ converge ssi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(u+1)}du$ converge.
  Or, $\displaystyle\lim_{u\to 0} u \times \frac{1}{\ln(1+u)} = 1$ donc
  $\dfrac{1}{\ln(1+u)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u}$.
  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u}du$ diverge donc il en est de même pour I_6.

- $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)+3}{\sqrt{t}}dt$

  $t \to \dfrac{\ln(t)+3}{\sqrt{t}}$ est négative sur $]0;e^{-3}]$.

  Considérons alors $f_7 : t \to -\dfrac{\ln(t)+3}{\sqrt{t}}$; elle sera positive sur $]0;e^{-3}]$.

  $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{3/4} \times f_7(t) = \lim_{t\to 0}(t^{1/2}\ln(t) + 3t^{3/4}) = 0.$

  Ainsi, $f_7(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/4}}\right)$.

  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{e^{-3}} \frac{1}{t^{3/4}}dt$ converge donc il en est de même pour I_7.

- $I_8 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$

  $f_8 : t \to \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est continue et positive sur $[2;+\infty[$.
  $\dfrac{1}{\sqrt{t-1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}}$

  Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1/2}}dt$ diverge donc il en est de même pour I_8.

- $I_9 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t}dt$

  $f_9 : t \to \dfrac{1}{\sqrt{t}+t}$ est continue et positive sur $]0;1]$.

$\dfrac{1}{\sqrt{t}+t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

En effet, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{1+\sqrt{t}} = 1$.

Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}dt$ converge donc il en est de même pour I_9.

ATTENTION : $\dfrac{1}{\sqrt{t}+t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ alors que $\dfrac{1}{\sqrt{t}+t} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1. En utilisant le critère de négligeabilité, montrons que cette intégrale converge quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \to t^n e^{-t}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$.
   I_n est impropre en $+\infty$.
   $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \times f_n(t) = 0$ par CC.
   Ainsi, $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ et par suite, pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
2. Calculons I_0.
   $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1$.
3. Trouvons une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
   Soit $x \geqslant 0$.
   Soient $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = t^{n+1}$.
   $u(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = (n+1)t^n$.
   u et v sont de classe C^1 sur $[0; x]$ donc par IPP, on a :
   $\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}dt = \left[-e^{-t} \times t^{n+1}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t} \times (n+1)t^n dt$ i.e
   $\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}dt = -\frac{x^{n+1}}{e^x} + (n+1)\int_0^x e^{-t} \times t^n dt$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{e^x} = 0$ par CC et d'après la convergence de I_n, on en déduit que :
   $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
4. Déduisons-en la valeur de I_n.
   On conjecture et on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$.
5. A l'aide d'un changement de variables, montrons la convergence et calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-2u} du$.
   Cette intégrale est impropre en $+\infty$.
   Soit $x \geqslant 0$.
   Considérons le CHV suivant : $t = 2u$.
   Lorsque u varie de 0 à x, t varie de 0 à $2x$.

$t = 2u \Rightarrow u = \dfrac{1}{2}t$

$du = \dfrac{1}{2}dt.$

$t \to \dfrac{1}{2}t$ est de classe C^1 sur $[0; x]$ donc le changement de variable est licite et :

$\displaystyle\int_0^x u^n e^{-2u} du = \int_0^{2x} (t/2)^n e^{-t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{2x} t^n e^{-t} dt.$

Comme I_n est une intégrale convergente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-2u} du$ converge et vaut $\dfrac{n!}{2^{n+1}}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Étudions la parité de la fonction f.

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ i.e $f(-x) = \dfrac{e^{2x} \times e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} = f(x)$.

Ainsi, f est paire.

2. Donnons une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis montrons la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et calculons sa valeur.

L'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $x \geqslant 0$.

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \left[\frac{(1+e^t)^{-1}}{-1}\right]_0^x = -\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{2}.$

On en déduit que l'intégrale converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

3. Déduisons-en la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

f est paire et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

4. Montrons la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ et déduisons-en la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est impropre en $+\infty$.

$t \to tf(t)$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$.

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \times tf(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{e^t(1+2e^{-t}+e^{-2t})} = 0.$

Ainsi, $tf(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ et par suite, pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

$t \to tf(t)$ est impaire et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge et vaut 0.

Exercice 8

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1}dt$.

1. Montrons que cette intégrale converge.
   Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1}dt$ converge.
   $t \to \dfrac{t-1}{t^3+1}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.
   De plus, $\dfrac{t-1}{t^3+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.
   Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1}dt$ et par suite, pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1}dt$.
2. Trouvons trois réels a, b et c tels que
   $\forall t > 0, \dfrac{t-1}{t^3+1} = \dfrac{at+b}{t^2-t+1} + \dfrac{c}{t+1}$, puis déduisons-en la valeur de cette intégrale.
   En réduisant le second membre au même dénominateur puis en procédant par identification, on a : $a = \dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{1}{3}$ et $c = -\dfrac{2}{3}$.
   Soit $x \geqslant 0$.
   Déterminons $\displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{t^3+1}dt$.
   $\displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{t^3+1}dt = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt - \frac{2}{3}\int_0^x \frac{1}{t+1}dt$.
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t-1}{t^3+1}dt &= \frac{1}{3}\left[\ln(|t^2-t+1|)\right]_0^x - \frac{2}{3}\left[\ln(|t+1|)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) - \frac{2}{3}\ln(x+1) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-1/x+1/x^2}{1+2/x+1/x^2}\right)\end{aligned}$$
   En passant à la limite en $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1}dt = 0$.

Exercice 9

Voir DM.

Exercice 10

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. A l'aide d'un changement de variable adéquat, déduisons-en que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge et précisons sa valeur.
   Soit $x \geqslant 0$.
   Déterminons $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.
   Soit $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$.

- Lorsque t varie de 0 à x, u varie de 0 à $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$
- $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \sqrt{2}u$
- $dt = \sqrt{2}du$

$u \to \sqrt{2}u$ est C^1 sur $\left[0; \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right]$ donc le changement de variable est licite et on a :

$\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}dt = \int_0^{x\sqrt{2}} e^{-u^2}\sqrt{2}du.$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

2. Concluons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge et précisons sa valeur.

$t \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 11

Voir DM.

Exercice 12

Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Vérifions que pour $x > 0$, cette intégrale est bien convergente. La fonction Γ (lire gamma (majuscule)) est bien définie.

Soit $x > 0$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est impropre en $+\infty$.

$t^2 \times t^{x-1}e^{-t} = t^{x+1}e^{-t}$ et a pour limite 0 en $+\infty$ par croissance comparée

donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Si $x \geqslant 1$, alors $t \to t^{x-1}e^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $\Gamma(x)$ existe.

Si $x < 1$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est également impropre en 0.

Or, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$.

Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ converge ssi $1 - x < 1$ i.e $x > 0$.

Ainsi, pour $x > 0$, $\Gamma(x)$ est convergente.

2. Montrons que $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On réalise une intégration par parties ce qui permet d'obtenir le résultat.

3. Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.

On détermine tout d'abord $\Gamma(1)$ qui vaut 1 puis on démontre la formule par récurrence.

4. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

A l'aide du changement de variable $t = u^2$, on obtient $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

5. On en déduit la valeur de $\Gamma(\frac{7}{2})$.

$\Gamma(\frac{7}{2}) = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}$.