Chapitre 3 : Équations Différentielles

Une équation différentielle (ED) est une équation qui relie une fonction inconnue y de la variable x à ses dérivées successives y', y'',... et d'autres fonctions (constantes, f...) Elle est utilisée pour décrire des phénomènes dans de nombreux domaines, comme la physique, l'économie, la biologie, et l'ingénierie. Les équations différentielles peuvent être classées en différentes catégories en fonction de plusieurs critères, comme le type de dérivées qu'elles impliquent et leur ordre.

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation.

Une équation différentielle d'ordre n peut être écrite sous la forme générale suivante :

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

où y', y'',... sontdes abréviations pour les dérivées de la fonction $t \to y(t)$, et F une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n+2}$

On appelle **solution** ou **intégrale d'une équation différentielle** toute fobction $y = f(x)$ vérifiant cette équation. En général, x peut étre réelle ou complexe et y peut étre réelle ou complexe, Nous limiterons ici au cas ou x est réel.

1 Équations différentielles du premier ordre

Partons de l'équation $F(x, y, y') = 0$. Si cette équation est soluble en y', on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y)$$

Une fois exprimée sous cette forme, l'équation devient une équation différentielle ordinaire explicite de premier ordre.

1.1 Équation à variables séparables

Considérons l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$y' = f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \tag{1}$$

Comme $y' = \frac{dy}{dx}$, on peut toujours la réécrire sous la forme

$$N(x, y)dy - M(x, y)dx = 0$$

Définition 1
Si on peut écrire que $M(x, y) = M(x)$ et $N(x, y) = N(y)$ dans l'équation (1), de sorte que

$$M(x)dx - N(y)dy = 0 \tag{2}$$

alors on dit qu'il s'agit d'une **équation différentielle à variables séparables.**

1.1.1 Méthode de résolution

Pour résoudre l'équation différentielle (2), on la réécrit d'abord sous la forme

$$\begin{aligned}
M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad M(x) - N(y)y' = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad M(x) - N(y(x))y'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int \left[M(x) - N(y(x))y'(x)\right]dx = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int M(x)dx - \int N(y(x))y'(x)dx = C \\
\text{On utilise le fait que} \quad & \quad \int N(y(x))y'(x)dx = \int N(y)dy \\
&\Leftrightarrow \quad \int M(x)dx - \int N(y)dy = C
\end{aligned}$$

Exemple 2
Considérons l'équation différentielle non linéaire :

$$\begin{aligned}
y'(x) = -\frac{x^4}{y^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^4}{y^2} \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 dy + x^4 dx = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}x^5 = C \\
&\Leftrightarrow \quad 5y^3 + 3x^5 = C \\
&\Leftrightarrow \quad y^3 = \frac{1}{5}(c - 3x^5) \\
&\Leftrightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{5}(c - 3x^5)}
\end{aligned}$$

1.2 Équations différentielles linéaire du premier ordre

Définition 3
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation qui linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y'. Sa forme générale est :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{3}$$

où y est une fonction réelle inconnue, et a,b et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I, tel que la fonction a ne s'annule pas sur I.

Exemple 4
La solution générale de l'équation

$$y' - xy = x$$

est

$$y(x) = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Théorème 5
Les solutions de l'équation différentielle homogène : $a(x)y' + b(x)y = 0$, *sont toutes les fonctions* $y : x \mapsto Ce^{-A(x)}$, *avec* A *une primitive de* $\frac{b(x)}{a(x)}$ *sur* I *et* $C \in \mathbb{R}$

1.3 Équations différentielles linéaire du premier ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire (EDL) du premier ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$y' + ay = f(x) \tag{E}$$

avec

- ◇ a est une constante fixée
- ◇ $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle I connue, appelée second membre de l'équation,
- ◇ $y(x)$ est une fonction inconnue dérivable sur I.

1.3.1 Équation homogène (ou équation sans second membre)

Définition 6
On appelle équation homogène (ou équation sans second membre) associée à (E) l'équation suivante :

$$y' + ay = 0 \tag{E_0}$$

Théorème 7
Solution générale de (E_0) *L'ensemble des solutions de l'équation homogène* (E_0) *est constitué des fonctions* $y : I \to \mathbb{R}$ *de la forme*

$$y : x \mapsto Ce^{-ax}$$

. On dit que y_H *(dépendant du paramètre) est la solution générale de* (E_0).

- ◇ Il y a la solution $y = 0$.

◇ Cherchons les solutions ne s'annulant en aucun point.On peut alors écrire :

$$\frac{y'}{y} = -a \implies \int \frac{y'}{y} = -\int a\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = -ax + Cte,$$
$$\implies y = e^{Cte}.e^{-ax}$$

La fonction y ne s'annulant pas et étant continue, elle garde un signe constant. En posant $\lambda = \pm e^{Cte}$ suivant le signe de y, on obtient :

$$y = Ce^{-ax}.$$

Nous obtenons donc une famille de fonctions. La constante C pourra être calculée pour répondre à un cas précis à partir, par exemple, d'une condition particulière du type : $y(x_0) = y_0$.

Exemple 8
Résoudre l'EDO suivante

$$\begin{cases} y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La solution est $y = 2e^{-4x}$.

1.4 Équation inhomogène (avec second membre)

L'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre s'écrit :

$$y' + ay = f(x) \tag{E}$$

Pour résoudre cette équation, on suit ces étapes principales :

1. **Solution de l'équation homogène associée :** On résoud l'équation homogène associée à (E) :

$$y' + ay = 0 \tag{E_0}$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$y_H = Ce^{-ax}.$$

où C est une constante d'intégration.

2. **Méthode de la varaition de la constante :** On suppose que la constante C dépend de x, c'est-à-dire que $C \longrightarrow C(x)$. On pose alors :

$$y(x) = C(x)e^{-ax}.$$

Appliquons cette méthode sur le cas général. Puisque l'équation différentielle fait intervenir la dérivée première, prenons la dérivée de l'expression précédente :

$$y'(x) = C'(x)e^{-ax} - aC(x)e^{-ax}.$$

En injectant cette expression dans l'équation différentielle à résoudre, nous obtenons :

$$\left(C'(x)e^{-ax} - aC(x)e^{-ax}\right) + a\left(C(x)e^{-ax}\right) = f(x).$$

Les termes contenant $C(x)$ s'annulent, il reste :

$$C'(x)e^{-ax} = f(x).$$

Divisons par e^{-ax} (supposé non nul) :

$$C'(x) = f(x)e^{ax}.$$

En intégrant, on trouve $C(x)$:

$$C(x) = \int f(x)e^{ax}\,dx + C_0,$$

où C_0 est une constante d'intégration.
Si on peut calculer explicitement cette intégrale, on en déduit la forme générale de la solution :

$$y(x) = \left(\int f(x)e^{ax}\,dx + C_0\right)e^{-ax}.$$

La valeur de C_0 est obtenue à partir d'une condition aux limites.

Exemple 9
Résoudre l'équation (E_3) :

$$y'(x) + y(x) = 1 \tag{E_3}$$

avec la condition initiale $y(0) = 2$.

L'équation homogène associée est :

$$y'(x) + y(x) = 0$$

Sa solution a été déterminée dans l'exemple précédent, nous avons donc :

$$y(x) = Ce^{-x}$$

Supposons à present que C dépend de la variable x. On a alors

$$y(x) = C(x)e^{-x} \Rightarrow y'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$$

En injectant ces expressions dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = 1$$

Soit :

$$C'(x)e^{-x} = 1 \Rightarrow C'(x) = e^x$$

Intégrons cette équation par rapport à x d'où $C(x) = e^x + C_0$

L'expression générale de la solution de l'équation différentielle est donc :

$$y(x) = [e^x + C_0]e^{-x} = 1 + C_0e^{-x}$$

La constante C peut être calculée à partir de la condition initiale $y(0) = 2$. On obtient alors :

$$y(0) = 1 + C_0e^0 = 1 + C_0 = 2$$

d'où $C = 1$. La solution est donc :

$$y(x) = 1 + e^{-x}$$

2 Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition 10
On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation du type :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

où y est une fonction réelle inconnue, et a,b, c et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I, tel que la fonction a ne s'annule pas sur I.

2.1 Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficient constant

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{$\mathcal{E}$}$$

Ou a, b, c, $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.

Proposition 11
la solution générale y de $(\mathcal{E})$ est la somme de la solution générale y_H de $\mathcal{E}_0$ et d'une solution particulière y_P de $(\mathcal{E})$.

$$y = y_H + y_P$$

Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre, avec ou sans conditions initiales. on cherche d'abord les solutions homogènes de $(\mathcal{E}_0)$, puis une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$ avec second membre et on applique le principe de superposition.

2.1.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 12

Soit (ε_0) une équation différentielle linéaire du second ordre homogène de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (\varepsilon_0)$$

On appelle polynôme caractéristique de l'équation (ε_0), le polynôme P défini par :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Soit Δ le discriminant du polynôme P. Les solutions de l'équation (ε_0) dépend du nombre de racines du polynôme P.

- *Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions de (ε_0) peuvent se mettre sous la forme :*

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si $\Delta = 0$,le polynôme P admet une racine double r_0, alors les solutions de (ε_0) peuvent se mettre sous la forme :*

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{r_0x}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = r_0 + i\omega$ et $r_2 = r_0 - i\omega$, alors les solutions de(ε_0) peuvent se mettre sous la forme :*

$$y(x) = e^{r_0x}[C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)], \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 13

Résoudre

$$y'' - 2y' + y = 0$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont les solutions sont 1, racine double. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme : $y = C_1xe^x + C_2e^x$.

Exemple 14

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les solutions sont 1 et 2. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme : $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$.

Exemple 15

Résoudre

$$y'' + y' + y = 0$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2+r+1 = 0$, dont les solutions sont $j = \exp(2i\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, racines complexes. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

sur $\mathbb{C}$: $y = C_1e^{jx} + C_2e^{j^2x}$ avec A et B complexes ou $y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$ avec (d'autres) C_1 et C_2 complexes.

2.1.2 Solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$

Proposition 16

Soit

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x) \qquad (\varepsilon)$$

une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Si y_1 est solution de

$$ay'' + by' + cy = f_1(x)$$

et y_2 est solution de

$$ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

alors $y_1 + y_2$ est solution de (ε)

Exemple 17

Cherchons une solution de l'équation

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 + e^{2x} \qquad (\xi)$$

On a

- Une solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2x^2$ est $y_{P_1} = -x^2 + x - \frac{3}{2}$.
- Une solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2x^2 + e^{2x}$ est $y_{P_2} = \frac{1}{3}xe^{2x}$.

Donc $y_P = -x^2 + x - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x}$ est solution particulière de l'équation (ξ)

Recherche d'une solution particulière Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\mathcal{E})$$

La solution particulière dont la forme dépend du second membre.

▷ **Second membre polynômial :** Si le second membre de $\mathcal{E}$ est une polynôme ($f(x) = P_n(x)$) de degré n. Il s'agit de chercher y_P sous la forme d'un polynôme $y_P(x) = Q(x)$ de degré n, vérifiant la condition suivante :

1. $y_P(x) = Q_n(x)$ Polynôme de degré n si $c \neq 0$;
2. $y_P(x) = xQ(x) = Q_{n+1}(x)$ Polynôme de degré $(n+1)$ si $c = 0$ et $b \neq 0$ et la valuation de Q_{n+1} est égale à 1 ;
3. $y_P(x) = x^2Q(x) = Q_{n+2}(x)$ Polynôme de degré $(n+2)$ si $c = b = 0$ et la valuation de Q_{n+2} est égale à 2.

Exemple 18
Pour lequation différentielle

$$y''(x) - y(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

On a $P(x) = x - 1 \in \mathbb{R}_1[x]$, et comme $c = 1 \neq 0$, on peut donc chercher y_P sous la forme d'un polynôme de degre 1, c'est-à-dire $y(x) = Ax + B$ avec $A,\ B \in \mathbb{R}$. Cela entraîne $y_P'(x) = A$, $y_P''(x) = 0$ et

$$(y_P''(x) - y(x) = -Ax - B = x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -A &= 1 \\ -B &= -1 \end{cases}$$

Ainsi $y_P(x) = -x + 1$ et La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution particulière y_P et de la solution générale de l'équation homogène associée y_H. L'équation homogène est :

$$y''(x) - y(x) = 0$$

dont la solution générale est :

$$y_H(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$$

Donc, la solution générale est :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x} - x + 1 \text{ avec } C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 19
Dans le cas particulier de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) = 2x - 3,\ x \in \mathbb{R}.$$

On a $P(x) = 2x - 3$ et comme $c = 0$ et $b = -2 \neq 0$ on peut se contenter de chercher y_P sous la forme d'un polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$, dont la valuation est egale à 1. Autrement dit $y_P(x) = Ax^2 + Bx$ avec A, $B \in \mathbb{R}$ Ainsi, on a $y_P'(x) = 2Ax + B$ et $y_P''(x) = 2A$, ce qui implique

$$(y_P''(x) - 2y'(x) = 2A - 4Ax - 2B = 2x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -4A &= 2 \\ 2A - 2B &= -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A &= -\frac{1}{2} \\ B &= 1 \end{cases}$$

soit finalement $y_P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire du second ordre a coefficients constants est donc

$$S = \left\{x \mapsto C_1e^{2x} + C_2 - \frac{1}{2}x^2 + x,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

▷ **Second membre du type** $P(x)e^{\alpha x}$

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } P(x) \text{ est un polynôme.}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_P = e^{\alpha x}x^mQ(x)$ Avec $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$

1. $y_P = e^{\alpha x}Q(x)$, $m = 0$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique ($\alpha \neq r_1$ et $\alpha \neq r_2$).
2. $y_P = e^{\alpha x}xQ(x)$, $m = 1$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique ($\alpha = r_1$ ou $\alpha = r_2$).
3. $y_P = e^{\alpha x}x^2Q(x)$, $m = 2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique ($\alpha = r_0$).

Exemple 20
Cherchons une solution de l'équation

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}$$

La solution générale de l'équation homogène associée est :

$$y_H(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

On a $f(x) = e^{3x} = P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x) = 1$ est un polynôme de degré 0 et comme $\alpha = 3$ n'est pas racine du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $y_P = e^{\alpha x}x^mQ(x) = Ae^{3x}$ par suite $y_P' = 3Ae^{3x}$ et $y_P'' = 9Ae^{3x}$ En remplaçant dans l'équation, on trouve $(9A - 3A - 2A)e^{3x} = e^{3x}$, d'où $A = \frac{1}{4}$. Donc une solution particulière est alors $y_P(x) = \frac{1}{4}e^{3x}$, D'où la solution générale est

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{3x} + C_1e^{-x} + C_2e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 21
Cherchons une solution de l'équation

$$y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$$

⋆ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à cofficients constants.

⋆ Résolution de l'équation homogène associée :$y'' + 4y' + 4y = 0$ L'équation caractéristique associée est :$r^2 + 4r + 4 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 0$ et la solution est $r_0 = -2$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_H(x) = (C_1x+C_2)e^{-2x}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

⋆ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$: Le second membre est de la forme $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 1$ non racine de l'équation caractéristique et $P(x) = x^2$. On cherche alors y_P sous la forme $y_P(x) = Q(x)e^x = (ax^2+bx+c)e^x$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors :

$$y_P'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x,$$

puits en on déduit

$$\begin{aligned} y_P''(x) &= \big(2ax + 2a + b + ax^2 + (2a + b)x + b + c\big)e^x \\ &= \big(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c\big)e^x \end{aligned}$$

Or on sait que $y_P''(x) + 4y_P'(x) + 4y_P = x^2e^x$, donc on obtient :

$$\big(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c + 4(ax^2 + (2a + b)x + b + c) + 4(ax^2 + bx + c)\big)e^x = x^2e^x$$

Endivisant par e^x, et en identifiant les coefficients du polynôme, on obtient : $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{4}{27}$ et $c = -\frac{2}{27}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_P(x) = \left(\frac{x^2}{9} - \frac{4x}{27} - \frac{2}{27}\right)e^x$

⋆ Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x} + \Big(\frac{x^2}{9} - \frac{4x}{27} - \frac{2}{27}\Big)e^x$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

Exemple 22
Cherchons une solution de l'équation

$$y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$$

On a déjà résolu l'équation homogène associée. Le second membre est cette fois de la forme $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha = -2$ racine double de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_P(x) = x^2 Q(x)e^{\alpha x} = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .On obtient par identification : $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$, $c = 0$. La solution générale est alors :

$$y(x) = \Big(C_1 x + C_2 + \frac{1}{12}x^2\Big)e^{-2x}$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

▷ **Second membre du type** $e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)), \quad \alpha \,\text{et}\, \beta \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

1. $y_P = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique.
2. $y_P = xe^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

ou $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$ sont deux polynomes de degré n tel que $n = \max\{deg(P_1), deg(P_2)\}$

Exemple 23
Commençons par chercher une solution particulière de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \sin(2x) \tag{ϵ}$$

⋆ Les solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x \text{ où } C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$$

⋆ Comme $f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)) = \cos 2x$ et $\alpha + i\beta = 2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$,on peut donc chercher une solution particulière de l'équation (ϵ) sous la forme $y_P(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$. On a donc

$$y_P''(x) = -4\big(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\big)$$

de sorte que

$$\big[y''(x) + y(x) = -3\big(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\big) = \sin 2x\big] \Leftrightarrow \begin{cases} -3A &= 1 \\ -3B &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $y_P(x) = -\frac{\sin 2x}{3}$ et l'ensemble des solutions est

$$S = \Big\{x \mapsto C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{\sin 2x}{3}; C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\Big\}$$

Exemple 24
Par contre,dans le cas particulièr de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \cos x \tag{ξ}$$

il s'avère que i est bien solution de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. On est donc amené à rechercher la solution particulière y_P sous la forme $x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$, avec C_1,$C_2 \in \mathbb{R}$. Ceci entrane $y_P'(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x(-C_2 \sin x + C_1 \cos x)$ et $y_P''(x) = 2(C_2 \sin x + C_1 \cos x) - x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$,et donc

$$\big[y_P''(x) + y_P(x) = -2\big(C_2 \sin x + C_1 \cos x\big) = \cos x\big] \Leftrightarrow \begin{cases} -2C_2 &= 0 \\ 2C_1 &= 1 \end{cases}$$

Comme ce système admet $C_1 = \frac{1}{2}$ et $C_2 = 0$ pour unique solution, on obtient que $y_P(x) = \frac{x}{2}\sin x$, ce qui fait que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle (ξ)est

$$S = \Big\{x \mapsto (C_1 + \frac{x}{2})\sin x + C_2 \cos x; C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\Big\}$$

Méthode de variation des constantes Si y_1, y_2 est une base de solutions de l'équation homogène (ε_0), on cherche une solution particulière sous la forme $y_P = C_1y_1 + C_2y_2$ mais cette fois C_1 et C_2 sont deux fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= \frac{f(x)}{a} \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

On autilisé le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène. Le système (S) se résout facilement, ce qui donne C_1' et C_2', puis C_1 et C_2 par intégration.

Exemple 25

Résourdre $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

- ⋆ Les solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x \text{ où } C_1,\ C_2\ \in \mathbb{R}$$

- ⋆ Solution particulière de l'équation sous la forme

$$y_P(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

tel que $C_1(x),\ C_2(x)$ sont des fonctions à trouver et que vérifient s

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= \frac{f(x)}{a} \end{cases} \qquad \text{(s)}$$

donc

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x &= 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x &= \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'\cos x\sin x + C_2'(\sin x)^2 &= 0 \\ -C_1'\cos x\sin x + C_2'(\cos x)^2 &= 1 \end{cases}$$

donc par somme $C_2' = 1$ ainsi $C_2 = x$ et $C_1' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ donc $C_1 = \ln(\cos x)$ ce que implique $y_P(x) = \ln(\cos x)\cos x + x\sin x$ est une solution particulère et la solution générale est

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x,\ C_1,\ C_2\ \in \mathbb{R}$$

Exemple 26

Résourdre $y'' + y = 2x^2 - 5x + 3$ sur $\mathbb{R}$

- ⋆ L'équation caractéristique est :$r^2 - 3r + 2 = 0$, admet pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Donc, la soulution générale de l'équation homogène associé est :

$$y_H(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- ⋆ On pose $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, puis on cherche une soulution particulière sous la forme

$$y_P = C_1(x)y_1 + C_(x)y_2$$

Avec $C_1(x),\ C_2(x)$ sont des fonctions à trouver et que vérifient (ς)

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= 2x^2 - 5x + 3 \end{cases} \qquad (\varsigma)$$

donc

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} &= 0 \\ C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} &= 2x^2 - 5x + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'\cos x\sin x + C_2'(\sin x)^2 &= 0 \\ -C_1'\cos x\sin x + C_2'(\cos x)^2 &= 2x^2 - 5x + 3 \end{cases}$$

donc par differncei $C_2 = (2x^2 - 5x + 3)e^{-2x}$ et $C_1' = -(2x^2 - 5x + 3)e^{-x}$ en réalisant une intégration par parties.On trouve

$$\begin{cases} C_1(x) &= (2x^2 - x + 2)e^{-x} \\ C_2(x) &= (-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4})e^{-2x} \end{cases}$$

Ce qui implique que $y_P(x) = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$ est une solution particulère et la solution générale est $y(x) = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{4} + C_1e^x + C_2e^{2x} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$