Département d'informatique
2ème année licence informatique
2019/2020
Dr. Chemseddine Chohra

Examen : Méthodes Numériques (Durée : 2h00)

Questions : (2 pts)

1. Qu'est-ce qu'une valeur propre d'une matrice ?

   Les deux réponses suivantes (ou autre réponse ayant le même sens) sont justes : ***(1 pts)***
   - λ est une valeur propre d'une matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre $\boldsymbol{n}$ si $\boldsymbol{det(A - \lambda I_n) = 0}$.
   - λ est une valeur propre d'une matrice A s'il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda x$.

2. Combien de bits utilisent les deux formats standards ***binary32*** et ***binary64*** pour représenter la mantisse d'un nombre flottant (sans compter le bit de normalisation) ?
   - ***binary32 :*** 23 bits (+1 bit de normalisation). ***(0.5 pts)***
   - ***binary64 :*** 52 bits (+1 bit de normalisation). ***(0.5 pts)***

   Ce n'est pas nécessaire de mentionner le bit de normalisation.

Exercice 1 : (3 pts)

Pour coder un nombre flottant, le format ***binary8*** utilise (dans l'ordre) : 1 bit de **signe**, 4 bits pour l'**exposant** et 3 bits de **mantisse** (+1 bit de normalisation) avec un biais d'exposant **X = 7**. Décoder les nombres suivants codés en format ***binary8*** (Donner le résultat en décimal).

- $A = (11101010)_{binary8}$.
  - Signe = 1 = (-).
  - Mantisse = $(1.010)_2$.
  - Exposant = $(1101)_2 - X = 13 - 7 = 6$.
  - $A = -(1.010)_2 * 2^6 = -(1010000)_2 = -80$. ***(1 pts)***
- $B = (01010101)_{binary8}$.
  - $B = +(1.101)_2 * 2^{10-7} = +(1.101)_2 * 2^3 = (1101)_2 = 13$. ***(1 pts)***
- $C = (11110000)_{binary8}$.
  - $C = -(1.000)_2 * 2^{14-7} = -(1.000)_2 * 2^7 = -(10000000)_2 = -128$. ***(1 pts)***

Exercice 2 : (5 pts)

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 & = 9 \\ -4x_1 - 7x_2 & = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = -2 \end{cases}$$

1. Donner la matrice de coefficients $\boldsymbol{A}$ et le vecteur du second membre $\boldsymbol{b}$ correspondant au système précédent.
   - On peut écrire le système sous la forme matricielle $\boldsymbol{Ax = b}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pts})\ et\ b = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pts}).$$

2. Le système $\boldsymbol{Ax = b}$ est-il triangulaire ? justifier.
   - Oui, le système $\boldsymbol{Ax = b}$ est triangulaire ***(0.5 pts)***, parce que la matrice de coefficients A est une matrice triangulaire inférieure. ***(0.5 pts)***
3. Résoudre le système $\boldsymbol{Ax = b}$.
   - $x_1 = b_1 / a_{11} = 9 / 3 = 3$. ***(1 pts)***

- $x_2 = (b_2 - a_{21} * x_1) / a_{22} = (2 - (-4) * 3) / (-7) = (2 + 12) / (-7) = -2$. ***(1 pts)***
- $x_3 = (b_3 - a_{31} * x_1 - a_{32} * x_2) / a_{33} = (-2 - 1 * 3 - 4 * (-2)) / 3 = 3 / 3 = 1$. ***(1 pts)***

Exercice 3 : (6 pts)

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer ***P(λ)*** le polynôme caractéristique de la matrice ***A***.
   - $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$
   - $\quad = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$
   - $\quad = (-2-\lambda)\big((1-\lambda)(5-\lambda) - 4\big) + 4\big((-2)(5-\lambda) - 8\big) + 2\big(-4 - 4(1-\lambda)\big)$
   - $\quad = (-2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 1) + 4(2\lambda - 18) + 2(4\lambda - 8)$
   - $\quad = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda - 2 + 8\lambda - 72 + 8\lambda - 16$
   - $P(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 27\lambda - 90$. ***(2 pts)***
2. Dire lesquelles parmi les valeurs suivantes sont des valeurs propres de la matrice ***A*** :
   a. ***$\lambda_1 = 1$.***
      - ***P(1) = -1 + 4 + 27 – 90 = -60 ≠ 0.***
      - Donc ***1*** n’est pas une valeur propre de ***A***. ***(1 pts)***

   b. ***$\lambda_2 = 3$.***
      - ***P(3) = -27 + 36 + 81 – 90 = 0.***
      - Donc ***3*** est une valeur propre de ***A***. ***(1 pts)***

   c. ***$\lambda_3 = 6$.***
      - ***P(6) = 0,*** donc ***6*** est une valeur propre de ***A***. ***(1 pts)***

   d. ***$\lambda_4 = 8$.***
      - ***P(8) ≠ 0,*** donc ***8*** n’est pas une valeur propre de ***A***. ***(1 pts)***

Exercice 3 : (4 pts)

Ecrire une fonction qui prend comme entrée une matrice carrée ***A*** d’ordre ***n***, et qui permet de dire si ***A*** est une matrice à diagonale strictement dominante. La fonction doit retourner ***1*** si ***A*** est une matrice à diagonale strictement dominante, et ***0*** sinon.

Algorithme estDominant
Entrées : Une matrice ***A*** d’ordre ***n***
Sorties : ***1*** si ***A*** est une matrice à diagonale strictement dominante, et ***0*** sinon.
Début
diagDom ← 1;
pour i **allant de** 1 **à** n **faire**
    s ← 0;
    pour j **allant de** 1 à n **faire**
        si j ≠ i **alors** s ← s + abs(A_{ij});
    fin pour;
    si s ≥ abs(A_{ii}) **alors** diagDom ← 0;
fin pour;
retourner diagDom;
Fin.