Département d'informatique
$2^{ème}$ année licence informatique
2022/2023
Dr. Chemseddine Chohra

Examen : Méthodes Numériques (corrigé type)

Questions : (2 pts)

1. Donner la différence entre une méthode directe et une méthode itérative pour la résolution d'un système linéaire.
   Une méthode directe calcule la solution directement, alors qu'une méthode itérative construit une suite qui converge vers la solution après un certain nombre d'itérations.
2. Quelles sont les conditions qui peuvent assurer la convergence de la méthode de Jacobi.
   La convergence de la méthode de Jacobi est assurée si l'une des conditions suivantes est satisfaite :
   - **La matrice de coefficients est à diagonale strictement dominante.**
   - **La matrice d'itération a une norme strictement inférieure à 1.**
   - **Le rayon spectral de la matrice d'itération est inférieur à 1.**

Exercice 1 : (5 pts)

Dans cet exercice, nous allons utiliser le format ***binary8*** pour coder (et décoder) les nombres flottants. Ce format utilise « 1 bit de **signe** », « 4 bits pour l'**exposant** » et « 3 bits de **mantisse** (+1 bit de normalisation) » avec un « biais d'exposant **X = 7** ».

1. Utiliser le format ***binary8*** pour coder les deux nombres suivants.
   - $A = 22 = (\ ????????\ )_{binary8}$.
     $A = (22)_{10} = (10110)_2 = 1.011 * 2^4$.
     Signe (+) => 0.
     Mantisse => 011.
     Exposant => $(4 + X)_{10} = (11)_{10} = (1011)_2$
     $A = (01011011)_{binary8}$.
   - $B = 5.5 = (\ ????????\ )_{binary8}$.
     $B = (5.5)_{10}$
     Partie entière : $(5)_{10} = (101)_2$.
     Partie fractionnaire : $(0.5)_{10} = 2^{-1} = (0.1)_2$.
     $(5.5)_{10} = (101.1)_2 = 1.011 * 2^2$.
     Signe (+) => 0.
     Mantisse => 011.
     Exposant => $(2 + X)_{10} = (9)_{10} = (1001)_2$
     $B = (01001011)_{binary8}$.
2. Effectuer les opérations suivantes au format ***binary8*** (en arrondi au plus proche).
   - $A \oplus B$.
     $A \oplus B = Round(1.011 * 2^4 + 1.011 * 2^2) = Round(1.011 * 2^4 + 0.01011 * 2^4)$
     $= Round(1.10111 * 2^4) = 1.110 * 2^4 = 28$.
   - $A \otimes B$.
     $A \otimes B = Round(1.011 * 2^4 * 1.011 * 2^2) = Round(1.011 * 0.01011 * 2^{(4+2)})$
     $= Round(1.111001 * 2^6) = 1.111 * 2^6 = 120$.

Exercice 2 : (6 pts)

Soit la matrice ***A*** suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de ***A***.
   $det(A) = (4 * (-6)) – (8 * (-2)) = -24 + 16 = -8$.
2. Donner le polynôme caractéristique de ***A***.
   $P(\lambda) = det(A – \lambda I_2) = (4 – \lambda) * (-6 - \lambda) + 16 = \lambda + 2\lambda – 8$.
3. Donner les valeurs propres de ***A***.
   $Delta = 2^2 – 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2$.
   $\lambda_1 = (-2 – 6) / 2 = -4$.

$\lambda_2 = (-2 + 6) / 2 = 2.$

a. Donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre.

Pour λ_1 : résoudre le système $(A - \lambda_1 I_2)x = 0$.

Nous obtenons le système

$$\begin{cases} (4-\lambda_1)x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ 8x_1 & + & (-6-\lambda_1)x_2 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ 8x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système admet un nombre infini de solutions, chaque vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avec $x_2 = 4x_1$ est un vecteur propre associé à λ_1, par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De la même façon, nous trouvons que chaque vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avec $x_2 = x_1$ est un vecteur propre associé à λ_2, par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : (4 pts)

Soit le système linéaire suivant (tourner la page) :

$$\begin{cases} 4x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 9 \\ & & -7x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ & & & & -4x_3 & = & -8 \end{cases}$$

1. Ecrire le système précédent sous sa forme matricielle (donner les valeurs de la matrice de coefficients A et le vecteur de second membre b).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ & \mathbf{-7} & \mathbf{6} \\ & & \mathbf{-4} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

$x_3 = -8 / -4 = 2.$

$x_2 = (5 - 6 * 2) / (-7) = 1.$

$x_1 = (9 - (1 * 1 + 2 * (-4))) / 4 = (9 - (1 - 8)) / 4 = (9 + 7) / 4 = 4.$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

2. Le système est-il triangulaire ? justifier.

   Oui le système est triangulaire (supérieur) car sa matrice de coefficients ne contient que des zéros en dessous de la diagonale.

3. Calculer la solution du système $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Exercice 4 : (3 pts)

La fonction Matlab suivante doit calculer la factorisation LU d'une matrice A (supposée carrée et inversible) :

```
function [L U] = factorisation_lu(A)
    n = size(A, 1);
    L = zeros(n);
    L = eye(n);
    U = A;
    for i = 1:n
        for j = i+1:n
            L(j, i) = U(i, i) / U(j, i);
            L(j, i) = U(j, i) / U(i, i);
            U(j, i:n) = U(j, i:n) - U(i, i:n) .* L(j, i);
        end
    end
end
```

- La fonction comporte quelques erreurs, trouver, expliquer et corriger les erreurs pour que la fonction marche correctement.