Chapitre 2 : Résolution de Systèmes Linéaires - Méthodes Directes

Chemseddine Chohra

2020/2021

Table des matières

Qu'est ce qu'un Système Linéaire

n équations qui portent sur n variables

Qu'est ce qu'un Système Linéaire

n équations qui portent sur n variables

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Solution :

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 4$$

Trouver x tel que :

$$Ax = b$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, et \;\; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Trouver x tel que :

$$Ax = b$$

pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, et \ b = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Trouver x tel que :

$$Ax = b$$

pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solution :

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
I_n x &= A^{-1}b \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
I_n x &= A^{-1}b \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}
$$

En pratique

- Calculer A^{-1} : résoudre un système linéaire plus large.

Qu'est ce qu'un Système Linéaire

Comment le Résoudre

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
I_n x &= A^{-1}b \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}
$$

En pratique

- Calculer A^{-1} : résoudre un système linéaire plus large.
- Utiliser d'autres méthodes.

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
I_n x &= A^{-1}b \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}
$$

En pratique

- Calculer A^{-1} : résoudre un système linéaire plus large.
- Utiliser d'autres méthodes.
- A^{-1} doit exister (A inversible).

Comment Savoir si une Matrice est Inversible?

- Calculer son déterminant.

Comment Savoir si une Matrice est Inversible?

- Calculer son déterminant.
    - Déterminant nul : matrice non inversible, pas de solution.

Comment Savoir si une Matrice est Inversible?

- Calculer son déterminant.
  - Déterminant nul : matrice non inversible, pas de solution.
  - Sinon : matrice inversible, solution unique existe.

Calculer le déterminant de A

- Choisir une ligne i.
- Calculer :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} ((-1)^{i+j} \times a_{i,j} \times det(A_{i,j}))$$

Développer sur les colonnes

- Choisir une colonne j.
- Calculer :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} ((-1)^{i+j} \times a_{i,j} \times det(A_{i,j}))$$

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$$

Pour :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} -7 & 9 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \\ &= (-7) \times (-9) - 9 \times 3 \\ &= 63 - 27 = 36 \end{aligned}$$

Pour :

$$B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -7 \\ -7 & -6 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} det(B) &= \begin{vmatrix} -9 & 0 & -7 \\ -7 & -6 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{vmatrix} \\ &= -9 \times \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -9 \times ((-6) \times (-7) - (-2) \times 4) - 7 \times ((-7) \times (-2) - (-6) \times 5) \\ &= -9 \times (50) - 7 \times (44) = -758 \end{aligned}$$

Qu'est ce qu'un Système Triangulaire

- Matrice de coefficients triangulaire.

Qu'est ce qu'un Système Triangulaire

- Matrice de coefficients triangulaire.
  - Inférieure : coefficients en dessus de la diagonale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Systèmes Triangulaires

Qu'est ce qu'un Système Triangulaire

- Matrice de coefficients triangulaire.
  - Inférieure : coefficients en dessus de la diagonale sont nuls.
  - Supérieure : coefficients en dessous de la diagonale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pourquoi ?

- Calcul de déterminant facile.

Pourquoi ?

- Calcul de déterminant facile.
- Système facile à résoudre.

Pourquoi ?

- Calcul de déterminant facile.
- Système facile à résoudre.
- Tout système carré peut se transformer en un système triangulaire.

Calcul

- Multiplier les éléments de la diagonale.
- Plus facile et rapide.

Calcul

- Multiplier les éléments de la diagonale.
- Plus facile et rapide.

Pour une matrice triangulaire A d'ordre n :

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Déterminer si une Matrice Triangulaire est Inversible

- S'il la diagonale contient des $\mathbf{0}$.
  - Le déterminant est nul.
  - La matrice n'est pas inversible.
  - $Ax = b$ n'a pas de solution unique.

Déterminer si une Matrice Triangulaire est Inversible

- S'il la diagonale contient des $\mathbf{0}$.
  - Le déterminant est nul.
  - La matrice n'est pas inversible.
  - $Ax = b$ n'a pas de solution unique.
- S'il la diagonale ne contient aucun $\mathbf{0}$.
  - Le déterminant n'est pas nul.
  - La matrice est inversible.
  - $Ax = b$ a une solution unique.

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$x_1 = b_1 / a_{1,1}$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}{\color{red}x_2} = b_2$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$a_{2,2}{\color{red}x_2} = b_2 - a_{2,1}x_1$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$x_2 = (b_2 - a_{2,1}x_1)/a_{2,2}$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}{\color{red}x_3} = b_3$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,n}x_n = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$a_{3,3}{\color{red}x_3} = b_3 - (a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2)$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$x_3 = (b_3 - (a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2))/a_{3,3}$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i}{\color{red}x_i} = b_i$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$a_{i,i}x_i = b_i - \left(a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}\right)$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$x_i = (b_i - (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}))/a_{i,i}$$

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Calculer les solutions :

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j \right) / a_{i,i}$$

Systèmes Triangulaires

Algorithme de Résolution

Entrées : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$
Sorties : x tel que $Ax = b$

$x_1 = b_1 / a_{1,1}$ {Calculer x_1}
for $i = 2 \cdots n$ **do**
  $s = 0$ {Pour chaque $1 < i \leq n$}
  for $j = 1 \cdots i-1$ **do**
    $s = s + a_{i,j} \times x_j$ {calculer $S = \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j$}
  end for
  $x_i = (b_i - s)/a_{i,i}$
end for

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Comment Résoudre

- Calculer les solution dans l'ordre inverse.
- Commencer par le calcul de x_n, puis remonter jusqu'à x_1.

Formule :

$$x_n = b_n / a_{n,n}$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j \right) / a_{i,i}$$

Calculer x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}, et \;\; b = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Calculer x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}, et\ \ b = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Solution :

- $x_1 = b_1/a_{1,1} = -5/-1 = 5.$

Calculer x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}, et \; b = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Solution :

- $x_1 = b_1/a_{1,1} = -5/-1 = 5.$
- $x_2 = (b_2 - a_{2,1} \times x_1)/a_{2,2} = (5 - (-2) \times 5)/3 = 15/3 = 5.$

Calculer x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}, et \;\; b = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Solution :

- $x_1 = b_1/a_{1,1} = -5/-1 = 5.$
- $x_2 = (b_2 - a_{2,1} \times x_1)/a_{2,2} = (5 - (-2) \times 5)/3 = 15/3 = 5.$
- $x_3 = (-8 - (2 \times 5 + (-5) \times 5))/-7 = -1$

Élimination de Gauss

De quoi s'agit-il ?

- Transforme un système linéaire quelconque en un système triangulaire.
- Le système obtenu est équivalent au système de départ.
  - Les deux systèmes ont la même solution.
  - Il suffit de résoudre le système triangulaire obtenu.

Comment c'est Fait?

- Tous les coefficients en dessous de la diagonale seront éliminés.
- Utiliser des combinaisons linéaires sur les équations.

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 & \leftarrow Eq_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n & \leftarrow Eq_n
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 & \leftarrow Eq_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n & \leftarrow Eq_n \end{cases}$$

Élimination

- Travailler sur la première colonne.
- Pour chaque ligne i, $Eq_i = Eq_i - (a_{i,1}/a_{1,1}) \times Eq_1$.

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 & \leftarrow Eq_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n & \leftarrow Eq_n
\end{cases}
$$

Deuxième ligne

$$
a^*_{2,j} = a_{2,j} - a_{1,j} \times (a_{2,1}/a_{1,1})
$$

$$
b^*_2 = b_2 - b_1 \times (a_{2,1}/a_{1,1})
$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\ a^*_{2,1}x_1 & + & a^*_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{2,n}x_n & = & b^*_2 & \leftarrow Eq_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n & \leftarrow Eq_n \end{cases}$$

Deuxième ligne

$$a^*_{2,j} = a_{2,j} - a_{1,j} \times (a_{2,1}/a_{1,1})$$
$$b^*_2 = b_2 - b_1 \times (a_{2,1}/a_{1,1})$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\ a^*_{2,1}x_1 & + & a^*_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{2,n}x_n & = & b^*_2 & \leftarrow Eq_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n & \leftarrow Eq_n \end{cases}$$

Pour $j = 1$

$$\begin{aligned} a^*_{2,1} &= a_{2,1} - a_{1,1} \times (a_{2,1}/a_{1,1}) \\ &= a_{2,1} - a_{2,1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\ & & a^*_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{2,n}x_n & = & b^*_2 & \leftarrow Eq_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n & \leftarrow Eq_n \end{cases}$$

Pour $j = 1$

$$\begin{aligned} a^*_{2,1} &= a_{2,1} - a_{1,1} \times (a_{2,1}/a_{1,1}) \\ &= a_{2,1} - a_{2,1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\ & & a^*_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{2,n}x_n & = & b^*_2 & \leftarrow Eq_2 \\ & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & a^*_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{n,n}x_n & = & b^*_n & \leftarrow Eq_n \end{cases}$$

Continuer

- Faire la même chose avec les autres colonnes.
- Pour éliminer l'élément à la ligne i en dessous de l'élément de la diagonale à la colonne j il faut calculer :

$$Eq_i = Eq_i - (a_{i,j}/a_{j,j}) \times Eq_j$$

Élimination de Gauss

Processus

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\ & & a^*_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{2,n}x_n & = & b^*_2 & \leftarrow Eq_2 \\ & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & a^*_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{n,n}x_n & = & b^*_n & \leftarrow Eq_n \end{cases}$$

Continuer

- Faire la même chose avec les autres colonnes.
- Pour éliminer l'élément à la ligne i en dessous de l'élément de la diagonale à la colonne j il faut calculer :

$$Eq_i = Eq_i - (a_{i,j}/a_{j,j}) \times Eq_j$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & \leftarrow Eq_1 \\ & & a^*_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a^*_{2,n}x_n & = & b^*_2 & \leftarrow Eq_2 \\ & & & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & & & & & a^*_{n,n}x_n & = & b^*_n & \leftarrow Eq_n \end{cases}$$

Continuer

- Faire la même chose avec les autres colonnes.
- Pour éliminer l'élément à la ligne i en dessous de l'élément de la diagonale à la colonne j il faut calculer :

$$Eq_i = Eq_i - (a_{i,j}/a_{j,j}) \times Eq_j$$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, et \;\; b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, et \;\; b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Élimination, Colonne 1

- $Eq_2 = Eq_2 - Eq_1 \times 2$
- $Eq_3 = Eq_3 - Eq_1 \times 3$
- $Eq_4 = Eq_4 - Eq_1 \times 4$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix}, et \;\; b = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Élimination, Colonne 1

- $Eq_2 = Eq_2 - Eq_1 \times 2$
- $Eq_3 = Eq_3 - Eq_1 \times 3$
- $Eq_4 = Eq_4 - Eq_1 \times 4$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix}, et\ \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Élimination, Colonne 2

- $Eq_3 = Eq_3 - Eq_2 \times 2$
- $Eq_4 = Eq_4 - Eq_2 \times 7$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix}, et \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Élimination, Colonne 2

- $Eq_3 = Eq_3 - Eq_2 \times 2$
- $Eq_4 = Eq_4 - Eq_2 \times 7$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix}, et \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Élimination, Colonne 3

- $Eq_4 = Eq_4 - Eq_3 \times (-1)$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, et\ \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Élimination, Colonne 3

- $Eq_4 = Eq_4 - Eq_3 \times (-1)$

Trouver x tel que $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, et \ \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Solution

- $x_4 = 1.$
- $x_3 = 1.$
- $x_2 = 1.$
- $x_1 = 2.$

Élimination de Gauss

Algorithme

Entrées : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$

Sorties : $A* \in \mathbb{R}^{n\times n}, b* \in \mathbb{R}^n$

$A* = A$

$b* = b$ $\{i$ parcourt les élément de la diagonale$\}$

for $i = 1 \cdots n-1$ **do**

  for $j = i+1 \cdots n$ **do**

    $C = a^*_{j,i}/a^*_{i,i}$ $\{j$ parcourt les ligne$\}$

    $b^*_j = b^*_j - b^*_i \times C$ $\{k$ parcourt les colonnes$\}$

    for $k = i \cdots n$ **do**

      $a^*_{j,k} = a^*_{j,k} - a^*_{i,k} \times C$

    end for

  end for

end for

Élimination de Gauss Avec Échange

A quoi ça sert

Soit le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -8 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, et\ \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Soit le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -8 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, et\ \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Élimination de Gauss

- Éliminer les éléments à la première colonne.
- Passer à la deuxième colonne.

Soit le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}, et \ \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Élimination de Gauss

- Éliminer les éléments à la première colonne.
- Passer à la deuxième colonne.

Soit le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}, et\ \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Élimination de Gauss

- Éliminer les éléments à la première colonne.
- Passer à la deuxième colonne.

Pivot nul

- $a_{2,2} = 0$.
- Impossible de faire la division.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}, et \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que faire

- Permuter la deuxième et la troisième ligne.
- Pas de permutation $\rightarrow$ matrice pas inversible.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}, et \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Que faire

- Permuter la deuxième et la troisième ligne.
- Pas de permutation $\rightarrow$ matrice pas inversible.

Factorisation LU

- Décomposition d'une matrice en deux matrice *triangulaires*.
- $A = LU$
  - L une matrice triangulaire inférieure.
  - U une matrice triangulaire supérieure.
- Basée sur l'élimination de Gauss.

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.

Factorisation LU

Exemple

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.
2. Appliquer l'élimination de Gauss sur U.

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.
2. Appliquer l'élimination de Gauss sur U.

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.
2. Appliquer l'élimination de Gauss sur U.
3. Pour chaque élément éliminé :
   - Mettre le facteur $a_{i,j}/a_{i,i}$ à la même position dans L.

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.
2. Appliquer l'élimination de Gauss sur U.
3. Pour chaque élément éliminé :
   - Mettre le facteur $a_{i,j}/a_{i,i}$ à la même position dans L.

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.
2. Appliquer l'élimination de Gauss sur U.
3. Pour chaque élément éliminé :
   - Mettre le facteur $a_{i,j}/a_{i,i}$ à la même position dans L.

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.
2. Appliquer l'élimination de Gauss sur U.
3. Pour chaque élément éliminé :
   - Mettre le facteur $a_{i,j}/a_{i,i}$ à la même position dans L.

Nous allons calculer la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Étapes

1. Mettre $U = A$ et $L = I_n$.
2. Appliquer l'élimination de Gauss sur U.
3. Pour chaque élément éliminé :
   - Mettre le facteur $a_{i,j}/a_{i,i}$ à la même position dans L.

A Quoi ça Sert

- Résolution de systèmes linéaires.
- Calcul du déterminant.

Comment ?

- Système à résoudre : $Ax = b$.
- Avec $A = LU$.

Comment ?

- Système à résoudre : $Ax = b$.
- Avec $A = LU$.
    - $LUx = b$.
    - D'abord résoudre $Ly = b$.
    - Puis $Ux = y$.

Comment ?

- Système à résoudre : $Ax = b$.
- Avec $A = LU$.
  - $LUx = b$.
  - D'abord résoudre $Ly = b$.
  - Puis $Ux = y$.

Avantages

- Faire une seule factorisation.
- Résoudre plusieurs systèmes avec différents second membres.

Soit le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, et \; b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Nous savons dèja que $A = LU$ tel que :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système triangulaire inférieur $Ly = b$:

- $y_1 = 11/1 = 11.$
- $y_2 = (12 - 2 \times 11)/1 = -10$
- $y_3 = (13 - (3 \times 11 + 2 \times (-10)))/1 = 0$
- $y_4 = (14 - (4 \times 11 + 7 \times (-10) + (-1) \times 0))/1 = 40$

Résoudre le système triangulaire supérieur $Ux = y$:

- $x_4 = 40/40 = 1.$
- $x_3 = (0 - 4 \times 1)/(-4) = 1$
- $x_2 = (-10 - ((-7) \times 1 + (-2) \times 1))/(-1) = 1$
- $x_1 = (11 - (4 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 1))/1 = 2$

Problèmes Avec le Calcul du Déterminant

- Difficile à la main même pour des petites matrices.
- Lent avec l'ordinateur pour des matrices de taille moyenne.
- Complexité $O(n!)$

Problèmes Avec le Calcul du Déterminant

- Difficile à la main même pour des petites matrices.
- Lent avec l'ordinateur pour des matrices de taille moyenne.
- Complexité $O(n!)$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

Problèmes Avec le Calcul du Déterminant

- Difficile à la main même pour des petites matrices.
- Lent avec l'ordinateur pour des matrices de taille moyenne.
- Complexité *O(n!)*

Solution Avec Factorisation LU

- Exploiter la propriété $det(X \times Y) = det(X) \times det(Y)$.
- Donc $det(A) = det(L) \times det(U)$.
- $det(L) = 1$, donc $det(A) = det(U)$.
- U est une matrice triangulaire.

Calculer le déterminant de A :

$$det(A) = det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times (-4) \times 40 = 160.$$

Merci de Votre Attention