Chapitre 2

Résolution des Systèmes Linéaires - Méthodes Directes

2.1 Introduction

On considère dans ce chapitre la résolution du système linéaire

$$Ax = b \tag{2.1}$$

avec A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et b un vecteur colonne de taille n, par des méthodes dites directes, c'est-à-dire fournissant, en l'absence d'erreurs d'arrondi, la solution exacte en un nombre fini d'opérations élémentaires. Après avoir donné quelques éléments sur la résolution numérique des systèmes triangulaires, nous introduisons la méthode d'élimination de Gauss. Ce procédé d'élimination est ensuite réinterprété en termes d'opérations matricielles, donnant lieu à la factorisation LU. Les propriétés de cette décomposition sont ensuite explorées.

2.2 Qu'est ce qu'un Système d'équations Linéaire

Un système d'équations linéaire est un système constitué de n équations qui portent sur les mêmes n inconnus, il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Le problème est de trouver les valeurs des inconnues $x_1, x_2 \cdots x_n$ qui satisfassent toutes les n équations simultanément. Un système linéaire peut également être écrit sous la forme matricielle comme le montre l'équation 2.1 tel que

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Pour une matrice inversible A La solution x peut être calculée avec la formule montrée dans 2.4 :

$$x = A^{-1}b \tag{2.4}$$

En pratique la solution ne s'obtient pas en inversant la matrice A (calculant A^{-1}) parce que ce calcule coûte beaucoup plus cher (en terme de complexité) que la résolution du système linéaire. Néanmoins, la matrice A doit être inversible pour que le système accepte une solution unique. Si A n'est pas inversible le système soit n'accepte pas de solution, ou bien il accepte un nombre infini de solutions. Pour savoir si une matrice est inversible, il suffit de calculer son **déterminant**. **Si le déterminant est nul**, alors la matrice A n'est pas inversible et donc le système $Ax = b$ n'a pas de solution unique. **Sinon (si A est inversible)**, le système accepte une solution unique et nous verrons dans ce chapitre comment peut elle être obtenue.

2.3 Calcul de déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n peut être calculé à l'aide des déterminants de matrices de taille *n - 1* obtenues en enlevant à la matrice de départ une ligne i et une colonne j. Notant $A_{i,j}$ la matrice obtenue en enlevant à la matrice A la ligne i et la colonne j comme le montre la relation suivante :

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Le calcul de déterminant peut être développé sur les ligne ou bien sur les colonnes. La formule suivante montre le développement de calcul sur la i^{ieme} ligne.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \times a_{i,j} \times det(A_{i,j})\right) \quad (2.6)$$

2.3.1 Déterminant d'une matrice de dimension 2

Pour une matrice carrée A d'ordre 2, la formule permettant de calculer le determinant est plus simple comme le montre l'équation 2.7

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1} \quad (2.7)$$

Exemple :

Calculons les déterminants des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -7 \\ -7 & -6 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Calcule du déterminant de A :

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} -7 & 9 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \\ &= (-7) \times (-9) - 9 \times 3 \\ &= 63 - 27 = 36 \end{aligned}$$

Calcule du déterminant de B :

$$\begin{aligned} det(B) &= \begin{vmatrix} -9 & 0 & -7 \\ -7 & -6 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{vmatrix} \\ &= -9 \times \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -9 \times ((-6) \times (-7) - (-2) \times 4) - 7 \times ((-7) \times (-2) - (-6) \times 5) \\ &= -9 \times (50) - 7 \times (44) = -758 \end{aligned}$$

2.4 Résolution des Systèmes Triangulaires

Un système triangulaire est un système linéaire ayant une matrice de coefficients triangulaire. Une matrice triangulaire est une matrice carrée dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale, est nulle. Nous distinguons deux types de matrices triangulaires : les matrices triangulaires supérieures et les matrices triangulaires inférieures.

2.4.1 Matrices Triangulaires Inférieures

Une matrice triangulaire inférieure est une matrice dont les éléments en dessus de la diagonale principale sont tous des zéros. En d'autres termes, on dit qu'une matrice A d'ordre n est triangulaire inférieure si pour chaque $j \leq n$ et $i < j$, nous avons $a_{i,j} = 0$. Une matrice triangulaire inférieure prend la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

2.4.2 Matrices Triangulaires Supérieures

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice dont les éléments en dessous de la diagonale principale sont tous des zéros. On dit qu'une matrice A d'ordre n est triangulaire inférieure si pour chaque $i \leq n$ et $j < i$, nous avons $a_{i,j} = 0$. Une matrice triangulaire supérieure prend la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

2.4.3 Déterminant d'une Matrice Triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure peut est beaucoup plus simple à calculer étant la multiplication des ses coefficients diagonaux. Pour une matrice triangulaire A, la formule 2.10 montre comment calculer le déterminant de A.

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \tag{2.10}$$

Il est donc plus facile de déterminer si une matrice triangulaire est inversible. Si les éléments du diagonal de la matrice ne contiennent pas de zéros, alors A est inversible, sinon elle l'est pas.

2.4.4 Algorithme de Résolution d'un Système triangulaire

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{2.11}$$

Pour résoudre le système dans 2.13, nous commençons d'abord par le calcul simple de $x_1 = b_1/a_{1,1}$. Une fois fait, on peut procéder au calcul de x_2 puis x_3 jusqu'à x_n dans cet ordre à l'aide de la formule 2.12

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_{i,j} \times x_j) \right) / a_{i,i} \tag{2.12}$$

L'algorithme mis en oeuvre pour cette résolution effectue $n(n \times 1)/2$ additions et soustractions, $n(n \times 1)/2$ multiplications et n divisions pour calculer la solution, soit un nombre d'opérations global de l'ordre de n^2. On notera que pour calculer la i^{ieme}, $2 \leq i \leq n$, composante du vecteur solution x, on effectue un produit scalaire entre le vecteur constitué des $i-1$ premiers éléments de la i^{ieme} ligne de la matrice A et le vecteur contenant les $i-1$ premières composantes de x. L'accès aux éléments de A se fait donc ligne par ligne. L'algorithme 1 montre en détail comment résoudre un système triangulaire inférieur.

Algorithme 1 Résolution d'un Système Triangulaire Inférieur

Entrées : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$
Sorties : x tel que $Ax = b$

```
x_1 = b_1/a_{1,1}
for i = 2 ··· n do
    s = b_i
    for j = 1 ··· i − 1 do
        s = s − a_{i,j} × x_j
    end for
    x_i = s/a_{i,i}
end for
```

Pour résoudre un système triangulaire supérieur sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{2.13}$$

il faut commencer d'abord par le calcul de $x_n = b_n/a_{n,n}$. Par la suite on peut procéder au calcul de x_{n-1} puis x_{n-2} jusqu'à x_1 dans cet ordre à l'aide de la formule 2.14

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{i,j} \times x_j) \right) / a_{i,i} \tag{2.14}$$

L'algorithme 2 montre en détail comment résoudre un système triangulaire supérieur.

Exemple :

Soit le système triangulaire supérieur $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système triangulaire supérieur nous utilisons l'algorithme 2 pour calculer

Algorithme 2 Résolution d'un Système Triangulaire Supérieur

Entrées : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$
Sorties : x tel que $Ax = b$

$x_n = b_n / a_{n,n}$
for $i = n-1 \cdots 1, pas = -1$ **do**
  $s = b_i$
  for $j = i+1 \cdots n$ **do**
    $s = s - a_{i,j} \times x_j$
  end for
  $x_i = s / a_{i,i}$
end for

les solutions x_3, x_2 *et* x_1 dans ce même ordre.

— $x_3 = b_3/a_{3,3} = -9/3 = -3.$

— $x_2 = (b_2 - a_{2,3} \times x_3)/a_{2,2} = (1 - 1 \times (-3))/-2 = 4/-2 = -2.$

— $x_1 = (b_1 - (a_{1,2} \times x_2 + a_{1,3} \times x_3))/a_{1,1} = (10 - ((-8) \times (-2) + 5 \times (-3)))/9 = 1$

La solution du système est :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemple :

Dans ce deuxième exemple, nous allons résoudre le système triangulaire inférieur $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système triangulaire inférieur nous utilisons l'algorithme 1 pour calculer les solutions x_1, x_2 *et* x_3 dans ce même ordre.

— $x_1 = b_1/a_{1,1} = -5/-1 = 5.$

— $x_2 = (b_2 - a_{2,1} \times x_1)/a_{2,2} = (5 - (-2) \times 5)/3 = 15/3 = 5.$

— $x_3 = (b_3 - (a_{3,1} \times x_1 + a_{3,2} \times x_2))/a_{3,3} = (-8 - (2 \times 5 + (-5) \times 5))/-7 = -1$

La solution du système est :

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.5 Élimination de Gauss

C'est une technique permettant de transformer un système linéaire quelconque en un système triangulaire équivalent (dans le sens ou il à la même solution). Étant donné un système linéaire $Ax = b$, l'élimination de Gauss consiste en premier lieu à mettre à zéro une partie des coefficients de la matrice A. Cette étape est qualifiée d'élimination, et utilise le fait qu'on ne modifie pas la solution d'un système linéaire en ajoutant à une équation donnée une combinaison linéaire des autres équations. Si A est inversible, la solution du système peut ensuite être obtenue par une méthode de résolution de système triangulaire comme nous l'avons montré dans la section 2.4

2.5.1 Élimination de Gauss *Sans Échange*

Commençons par décrire étape par étape la méthode dans sa forme de base, dite *sans échange*, en considérant le système linéaire 2.3, avec A une matrice inversible d'ordre n. Supposons de plus que le terme $a_{1,1}$ de la matrice A est non nul. Nous pouvons alors éliminer l'inconnue x_1 des lignes 2 à n du système en leur retranchant respectivement la première ligne multipliée par le coefficient $a_{i,1}/a_{1,1}$ pour $i = 2 \cdots n$.

En notant $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$ la matrice et le vecteur second membre résultant de ces opérations (nous appelons les matrices de départ $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$ pour être consistant), nous avons alors pour $i = 2 \cdots n, j = 2 \cdots n$:

$$a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} \times a_{1,j}^{(1)} \; et \; b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} \times b_1^{(1)}. \tag{2.15}$$

Le système obtenu $A^{(2)}x = b^{(2)}$ est équivalent au système de départ $(A^{(1)}x = b^{(1)})$. Néanmoins, la matrice $A^{(2)}$ a la particularité que tous ces coefficients de la première colonne qui sont en dessous de la diagonale sont nuls. Donc la matrice $A^{(2)}$ sera de la forme suivante :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(2)} & a_{1,2}^{(2)} & \cdots & a_{1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

En supposant que $a_{2,2}^{(2)} \neq 0$, on peut procéder à l'élimination de l'inconnue x_2 des ligne $3 \cdots n$. Puis pour $a_{3,3}^{(3)} \neq 0$ on élimine l'inconnue x_3 des ligne $4 \cdots n$, et ainsi de suite. On obtient sous l'hypothèse que $a_{k,k}^{(k)}$ pour $k = 1 \cdots n$ une suite de matrice $A^{(k)}$ tel que :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(k)} & a_{1,2}^{(k)} & \cdots & a_{1,k}^{(k)} & \cdots & a_{1,n}^{(k)} \\ 0 & a_{2,2}^{(k)} & \cdots & a_{2,k}^{(k)} & \cdots & a_{2,n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Pour $k = n$, la matrice $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure tel que :

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(n)} & a_{1,2}^{(n)} & \cdots & a_{1,n}^{(n)} \\ 0 & a_{2,2}^{(n)} & \cdots & a_{2,n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Le système $A^{(n)}x = b^{(n)}$ est un système triangulaire supérieur équivalent au système de départ $Ax = b$ et il peut simplement être résolu en utilisant l'algorithme 2.

Les quantités $a_{k,k}^{(k)}$ sont appelés *les pivots* et nous avons supposé qu'elles étaient non nulles à chaque étape. Mais en pratique, même si la matrice A est inversible, cela n'empêche aucunement l'apparition de pivot nul durant l'élimination.

Exemple :

Considérons le système linéaire $Ax = b$ avec :

Algorithme 3 Élimination de Gauss Sans Échange

Entrées : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$
Sorties : $A^{(n)}, b^{(n)}$

$A^{(1)} = A$
$b^{(1)} = b$
for $i = 1 \cdots n-1$ **do**
  $A^{(i+1)} = A^{(i)}$
  $b^{(i+1)} = b^{(i)}$
  for $j = i+1 \cdots n$ **do**
    $C = a_{j,i}^{(i)} / a_{i,i}^{(i)}$
    $b_j^{(i+1)} = b_j^{(i)} - b_i^{(i)} \times C$
    for $k = i \cdots n$ **do**
      $a_{j,k}^{(i+1)} = a_{j,k}^{(i)} - a_{i,k}^{(i)} \times C$
    end for
  end for
end for

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Nous allons procéder à l'élimination des éléments en dessous du premier élément de la diagonale. Pour éliminer l'élément de la deuxième ligne, nous multiplier les éléments de la première ligne par 2 et la soustraire à la deuxième. On obtient la matrice intermédiaire A^* et le vecteur intermédiaire b^* suivants :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, et\ b^* = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Pour la troisième ligne, nous multiplions la première ligne par 3, et pour la quatrième ligne, nous la multiplions par 4. Le résultat est le suivant :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix}, et\ b^{(2)} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Nous passons maintenant au calcul de $A^{(3)}$ et $b^{(3)}$. Pour cela nous devons éliminer les éléments de la diagonale à la deuxième colonne (donc de la troisième et la quatrième ligne). Pour la troisième ligne, nous allons soustraire la deuxième ligne multipliée par 2, et pour la quatrième ligne, nous allons soustraire la deuxième ligne multipliée par 7. On obtient le résultat suivant :

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix}, et\ b^{(3)} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Finalement, pour éliminer les élément en dessous de la troisième diagonale, Nous allons additionner la ligne 3 à la ligne 4. Nous obtenons :

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, et\ b^{(4)} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Pour trouver la solution du système $Ax = b$, il suffit de calculer la solution du système équivalent $A^{(4)}x = b^{(4)}$ en utilisant l'algorithme 2.

Exemple :

Nous montrons dans cet exemple un système linéaire dont la matrice de coefficients est inversible, mais qui ne peut pas être résolu avec la méthode de Gauss sans échange. Soit le système $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -8 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

La matrice A est bien inversible comme on peut le vérifier en calculant son déterminant :

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -8 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times ((-4) \times 1 - 4 \times 5) - 1 \times ((-8) \times 1 - 4 \times 4) + 5 \times ((-8) \times 5 - (-4) \times 4) \\
&= 2 \times (-24) - 1 \times (-24) + 5 \times (-24) \\
&= -48 + 24 - 120 = -144.
\end{aligned}
$$

Nous allons procéder maintenant à l'élimination de Gauss afin de résoudre le système linéaire $Ax = b$. Nous calculons d'abord $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$. Pour ce faire, nous allons additionner à la deuxième ligne la première ligne multipliée par 4, et soustraire à la troisième ligne la première ligne multipliée par 2 :

$$
A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}, et\ b^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

à partir d'ici, on ne peut pas éliminer les éléments en dessous de $a_{2,2}^{(2)}$ car le pivot est nul.

2.5.2 Élimination de Gauss *Avec Échange*

Dans ce qui suit, nous allons garder les notations de la section 2.5.1. Pour l'élimination de Gauss sans échange, nous avons supposé que les pivots sont non nuls ($a_{k,k}^{(k)} \neq 0$). Dans la version *Avec Échange*, cette condition n'est pas requise. Dans le cas de l'élimination de Gauss sans échange, à l'étape k, seul un des coefficients de la colonne k en dessous de la diagonale ne doit pas être nul. Si ce n'est pas le cas alors la matrice A n'est pas inversible. Donc à la première étape, au moins l'un des coefficients de la première colonne de $A^{(1)}(= A)$ est non nul. On peut choisir un de ces éléments comme premier pivot d'élimination et l'on échange alors la ligne correspondante avec la première ligne du système avant de procéder à l'élimination de la première colonne, c'est-à-dire l'annulation de tous les éléments de la première colonne de la matrice (permutée) du système situés sous la diagonale. La éléments du vecteur b doivent également être inversés avec les lignes de la matrice A avant de procéder à l'élimination pour assurer que le système obtenu reste équivalent. En d"autres termes, inverser l'ordre des équations n'a pas d'effet sur la solution du système.

On note $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$ la matrice et le second membre du système obtenu et l'on réitère ce procédé. À l'étape k, avec $2 \leq k \leq n-1$ si la matrice A est inversible alors l'un au moins des éléments $a^(k)_{i,k}, k \leq i \leq n$ est différent de zéro. Après avoir choisi comme pivot l'un de ces coefficients non nuls, on effectue l'échange de la ligne de ce pivot avec la k^{ieme} ligne de la matrice $A^{(k)}$, puis l'élimination conduit à la matrice $A^{(k+1)}$. Ainsi, on arrive après $n-1$ étapes à la matrice $A^{(n)}$, dont le coefficient $a^{(n)}_{n,n}$ est non nul si A est inversible. En raison de l'échange de lignes qui a éventuellement lieu avant chaque étape d'élimination, on parle de méthode d'élimination de Gauss avec échange. Cette méthode évite de tomber dans le piège du pivot nul lorsque la matrice des coefficients A est inversible.

Exemple :

Considérons le système linéaire $Ax = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, et\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous calculons d'abord $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, et\ b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vu que $a^{(2)}_{2,2}$ est nul, nous allons permuter la deuxième et la troisième ligne avant de procéder à l'élimination. Nous obtenons la matrice intermédiaire A^* et le vecteur intermédiaire b^* suivants :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, et\ b^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous calculons maintenant $A^{(3)}$ et $b^{(3)}$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix}, et\ b^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Nous allons finir par le calcule de $A^{(4)}$ et $b^{(4)}$, puis nous allons résoudre le système triangulaire supérieur $A^{(4)}x = b^{(4)}$.

2.5.3 Choix du Pivot

On s'intéresse au choix du pivot à chaque étape de l'élimination. Si l'élément $a_{k,k}^{(k)}$ est non nul, il semble naturel de l'utiliser comme pivot (c'est d'ailleurs ce que l'on fait dans la méthode de Gauss sans échange). Cependant, à cause des erreurs d'arrondi existant en pratique à cause des calculs en virgule flottante, cette manière de procéder est en général à éviter. De fait, pour éviter la propagation des erreurs et obtenir des résultats plus précis, il est recommandé de choisir le plus grand pivot même dans le cas ou le pivot naturel est non nul.

2.6 Factorisation LU

Nous allons maintenant montrer que la méthode de Gauss dans sa forme sans échange est équivalente à la décomposition de la matrice A sous la forme d'un produit de deux matrices, $A = LU$, avec L une matrice triangulaire inférieure, et $U = A^{(n)}$ une matrice triangulaire supérieure. Soit un système linéaire $Ax = b$, et $A^{(2)}$ la matrice de coefficients obtenue après l'application de la première itération de l'élimination de Gauss.

La matrice $A = A^{(1)}$ peut être régénérée en ajoutant à chaque ligne j avec $2 \leq j \leq n$ la première ligne multipliée par $a_{j,1}^{(1)}/a_{1,1}^{(1)}$. Cela se traduit avec la multiplication matricielle suivante :

$$A^{(1)} = L^{(1)} \times A^{(2)} \tag{2.19}$$

avec :

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{3,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{4,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Cette règle peut être généralisée pour régénérer n'importe quelle matrice $A^{(k)}$ à partir de la matrice $A^{(k+1)}$ suivant la règle suivante :

$$A^{(k)} = L^{(k)} \times A^{(k+1)} \tag{2.21}$$

avec :

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{k+2,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

La matrice $A^{(1)} = A$ peut s'écrire sous la forme :

$$A = (L^{(1)} \times \cdots \times (L^{(n-2)} \times (L^{(n-1)} \times A^{(n)})) \cdots) \tag{2.23}$$

Vu que la multiplication matricielle est associative, nous obtenons :

$$A = \prod_{i=1}^{n-1} L^{(i)} \times A^{(n)} = LU \tag{2.24}$$

tel que :

$$L = \prod_{i=1}^{n-1} L^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{3,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \frac{a_{3,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{4,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \frac{a_{4,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} & \frac{a_{4,3}^{(3)}}{a_{3,3}^{(3)}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \frac{a_{n,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} & \frac{a_{n,3}^{(3)}}{a_{3,3}^{(3)}} & \frac{a_{n,4}^{(4)}}{a_{4,4}^{(4)}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

L'algorithme 4 basé sur l'élimination de Gauss montre les détails de factorisation d'une matrice A en deux matrices triangulaires L et U.

Algorithme 4 Factorisation LU

Entrées : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Sorties : $L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$A^{(1)} = A$
$L = I_n$ {Matrice identité de taille n}
for $i = 1 \cdots n-1$ **do**
  $A^{(i+1)} = A^{(i)}$
  for $j = i+1 \cdots n$ **do**
    $L_{j,i} = a_{j,i}^{(i)} / a_{i,i}^{(i)}$
    for $k = i \cdots n$ **do**
      $a_{j,k}^{(i+1)} = a_{j,k}^{(i)} - a_{i,k}^{(i)} \times L_{j,i}$
    end for
  end for
end for
$U = A^{(n)}$

Exemple :

Calculons la factorisation LU de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -13 \\ -4 & -14 & -4 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; et \; A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -12 & -14 \end{pmatrix}$$

Nous passons par la suite au calcul de $L^{(2)}$ et $A^{(3)}$:

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; et \; A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Finalement, nous avons $A = LU$ tel que $U = A^{(3)}$ et :

$$L = L^{(1)} \times L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

2.6.1 Applications de la Factorisation LU

Calcul du Déterminant

Pour une matrice A pouvant être écrite sous la forme $A = LU$ avec L une matrice triangulaire inférieure, et U une matrice triangulaire supérieure. Le calcul du déterminant de A et simplement calculer en multipliant les déterminants de L et U. Nous avons :

$$det(A) = det(LU) = det(L) \times det(U) \tag{2.27}$$

Vu que la matrice L et triangulaire unitaire (contenant que des uns sur la diagonale) et que le déterminant d'une matrice triangulaire est calculé en multipliant ces éléments diagonaux, nous pouvons simplement déduire que $det(L) = 1$. Et par conséquent nous avons :

$$det(A) = det(U) \tag{2.28}$$

Il faut noter qu'on pratique, la factorisation LU (basée sur l'élimination de Gauss) coûte beaucoup moins cher en terme de complexité algorithmique que de calculer le déterminant par décomposition comme nous l'avons présenté dans la section 2.3. Donc il est plus rapide d'utiliser la factorisation LU pour décomposer la matrice et puis calculer son déterminant.

Résolution de Systèmes Linéaires

La factorisation LU permet de résoudre efficacement des systèmes linéaires où la matrice de coefficients A est la même, mais avec plusieurs seconds membres différents. Pour une matrice $A = LU$, pour déterminer la solution x associée au second membre b, nous allons résoudre le système :

$$LUx = b \tag{2.29}$$

Posons $Ux = y$, dans ce cas nous pouvons premièrement résoudre le système

$$Ly = b \tag{2.30}$$

et puis procéder à la résolution du système :

$$Ux = y \tag{2.31}$$

Les deux systèmes présentés dans les équations 2.30 et 2.31 sont triangulaires et donc facile à résoudre quelque soit la valeur de b.