الفائدة المركبة

الدرس الأول

تعريف الفائدة المركبة:

هي تلك الفائدة الناتجة عن إضافة الفائدة البسيطة المتعلقة الفترة الأولى إلى الأصل في نهاية المدة، لتنتج بدورها فائدة للفترة الموالية وهكذا.

أي أنه في نهاية كل فترة تضاف الفائدة البسيطة المنتجة إلى رأس المال، لينتج فائدة بدوره خلال الفترة التالية.

مثال:

كم يصبح رأس مال قدره 100000 دج موظف بمعدل 8% بفوائد مركبة لمدة 3 سنوات؟

بتطبيق قانون الفائدة البسيطة والجملة نحصل على:

أ. حالة الفائدة البسيطة

السنوات	رأس المال في بداية السنة	الفائدة السنوية	رأس المال في نهاية السنة (الجملة)
1	100000	8000 = 0.08 x 100000	108000 = 8000 + 100000
2	100000	8000 = 0.08 x 100000	108000 = 8000 +100000
3	100000	8000 = 0.08 x 100000	108000 = 8000 +100000

أ. **حالة الفائدة المركبة:**

السنوات	رأس المال في بداية السنة	الفائدة السنوية	رأس المال في نهاية السنة (الجملة)
1	100000	8000 = 0.08 x 100000	108000 = 8000 + 100000
2	108000	8640 = 0.08 x 108000	116640 = 8640 + 108000
3	116640	9331.2 = 0.08 x 116640	125971.2 = 9331.2 + 116640

يلاحظ من الجدولين السابقين أن الفائدة البسيطة ثابتة (8000 دج)، أما الفائدة المركبة فهي تتساوى مع الفائدة البسيطة في السنة الأول فقط، لتبدأ بالازدياد من السنة الثانية، وهكذا.

القانون العام للفائدة المركبة:

تأسيسا على ما تقدم، لنرمز بـ :

A راس المال الموظف معبرا عنه بـ دج

n مدة التوظيف معبرا عنها بالسنة

i معدل الفائدة السنوي

Année	Capital au début de l'année	Intérêt de l'année	Valeur acquise à la fin de l'année	
1	A	$A\ i$	$A + A\ i =$	$A\ (1 + i)$
2	$A\ (1 + i)$	$A\ (1 + i)^1\ i$	$A\ (1 + i)\ (1 + i) =$	$A\ (1 + i)^2$
3	$A\ (1 + i)^2$	$A\ (1 + i)^2\ i$	$A\ (1 + i)^2\ (1 + i) =$	$A\ (1 + i)^3$
…..	……	……	……	
n-1	$A\ (1 + i)^{n-2}$	$A\ (1 + i)^{n-2}\ i$	$A\ (1 + i)\ (1 + i)^{n-2} =$	$A\ (1 + i)^1$
n	$A\ (1 + i)^{n-1}$	$A\ (1 + i)^{n-1}\ i$	$A\ (1 + i)\ (1 + i)^{n-1} =$	$\mathbf{A\ (1 + i)^n}$

وتكون الجملة (A_n) الناتجة في نهاية الدورة محسوبة بالفائدة المركبة حسب العلاقة التالية:

$$\mathbf{A_n = A_0\ (1 + i)^n}$$

إن المقدار **(1 +i)** يمكن إيجاده باستخدام أرقام الجدول المالي الأول من جداول الفائدة المركبة وفق ما هو موضح في الشكل الآتي:

I / n	1 2 3 4 …… i
1	
2	
3	
4	
.	
.	
.	
n	

حساب الفائدة

$$I = A_0 (1 + i)^n - A_0$$

أي أن:

$$\mathbf{I = A_0 [(1 + i)^n - 1]}$$

مثال تطبيقي:

وظف شخص مبلغ 1000 دج في أحد المصارف بفائدة مركبة وبمعدل 5% سنويا ولمدة 5 سنوات

- أوجد جملة هذا المبلغ في نهاية المدة المذكورة ؟

الحل:

لدينا بالتعريف:

$$A_n = A_0 (1 + i)^n$$

$$= 1000 (1.05)^5$$

$$(1.05)^5 = 1.276280$$

$$= 1000 \times 1.276280 = 1276.28 \text{ da}$$

ومنه فالفائدة تساوي:

$$I = A_n - A_0$$

$$= 1276.28 - 10000 = 276.28 \text{ da}$$

المقارنة بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة:

إن جملة وحدة نقدية واحدة بالفائدة البسيطة $A_n = (1 + tn)$

أما القيمة المكتسبة (الجملة) بالفائدة المركبة $A^n = (1 + i)^n$

ملاحظات هامة:

- ✓ لا تختلف الفائدة البسيطة عن الفائدة المركبة في السنة الأولى وكذلك الجملة.
- ✓ المبلغ الذي تحسب عليه الفائدة البسيطة هو دائماً أصل المبلغ المودع، أما المبلغ الذي تحسب عليه الفائدة المركبة فهو أصل المبلغ والفوائد معا، أي الرصيد المستحق في نهاية السنة السابقة

الرصيد المستحق في نهاية أي سنة يساوي رصيد السنة السابقة مضافا إليه فائدة هذه السنة في كل من الفائدة البسيطة والمركبة، أي أن:

فائدة بسيطة $A = a + i$

فائدة مركبة $A_n = A_0 + I$

- ✓ الرصيد المستحق في نهاية الفترة أو المدة يساوي أصل المبلغ مضافا إليه مجموع الفوائد في كل من الفائدة البسيطة والمركبة.

الدرس الثاني:

جملة المبلغ (A_0) إذا كانت المدة ليست عدد كامل من الدورات:

$$A_n = A_0 (1+i)^n$$

في القانون أعلاه افترضنا أن n عددا كاملا من الدورات، ولكن في كثير من الأحيان يكون غير ذلك فقد تكون عدد صحيح وكسر من السنوات، مثال: 8 سنوات و 5 أشهر، بمعنى: ($n = 8^{5/12}$) وبالتالي فإن الحصول على جملة المبلغ المودع، تكون بإتباع إحدى الحالتين التاليتين:

حالة 1: تقوم على حساب الفائدة المركبة للجزء الصحيح (السنوات)، أي استعمال القانون العام بالنسبة إلى الجزء الكامل واستعمال الفائدة البسيطة بالنسبة للجزء الكسري (الأشهر) وهذا ما يعرف بالحل العقلاني

حالة 2: تقوم على حساب الفائدة المركبة خلال الفترة n أي لكل المدة (السنوات والأشهر معا)، وهو ما يعني توسيع القانون السابق لـ n كاملة عندما تكون المدة كسرية وهذا هو الحل التجاري

أ. الحل العقلاني:

لنضع $n = k + \frac{p}{q}$

بعد k سنوات يصبح رأس المال المحصل عليه باستثمار بدائي لـ 1 دج:

$$A_k = A_0 (1+i)^k$$

ولنحسب الفوائد البسيطة المنتجة من طرف رأس المال A_k خلال الجزء السنوي بمعدل i، على النحو التالي :

$$A_k \times i \times \frac{p}{q} = A_0 (1+i)^k \times i \times \frac{p}{q}$$

ومنه فإن:

$$A_n = A_0 (1+i)^k + A_0 (1+i)^k \times i \times \frac{p}{q}$$

$$\mathbf{A_n = A_0 (1+i)^k \left(1 + i \cdot \frac{p}{q}\right)}$$

مثال:

ماهي القيمة المكتسبة من رأس مال يبلغ 100000 دج موظف لمدة 6 سنوات و 3 أشهر بمعدل 6% سنوي مستعملا الحل العقلاني؟

الحل:

لإيجاد الجملة لرأس المال الموظف بطريقة الحل العقلاني نطبق القانون التالي:

$$A_n = A_0\,(1+i)^{k}\,(1 + i\,.\,\frac{p}{q})$$

إذا:

$$A_n = 100000\,(1.06)^{6}\,(1 + 0.06\,.\,\frac{3}{12})$$

$$A_n = 100000 \text{ x} 1.418519 \text{ x } 1.015$$

$$= 100000 \text{ x } 1.43979678$$

$$= 143979.676 \text{ da}$$

إن استعمال العبارة يؤدي بنا إلى مفهوم المعدلات المتناسبة، فما المقصود بها؟

تعريف المعدلات المتناسبة: يقال أن معدلين تابعين لمدد مختلفة، هما متناسبين عندما تكون نسبتهما تساوي نسبة مدتيهما الاستثمارية المتتالية.

فمثلاً:

- إذا كان المعدل سنوي 6%، فإن المعدل السداسي المتناسب يكون 3%، أي عن كل 6 أشهر وبالتالي الفائدة تضاف مرتين في السنة، أي: (12 ÷ 6 = 2).

ومن ثم فالمحصلة هي:

إذا كان المعدل سنوي $\%i_a$، فإن المعدل السداسي $\%i_s$ المتناسب يكون $\%\frac{ia}{2}$

إذا كان المعدل سنوي $\%i_a$، فإن المعدل الثلاثي $\%i_t$ المتناسب يكون $\%\frac{ia}{4}$

ب. الحل التجاري:

المعدلات المتكافئة:

تعريف: يقال أن معدلين متصلين بمدد استثمار مختلفة، هما متكافئين عندما يؤديان بنفس مدة التوظيف إلى نفس الجملة بفوائد مركبة

فمثلا:

1 دج موظف بمعدل سنوي $\%i_a$ يصيح بعد سنة $(1 + i_a)$

1 دج موظف بمعدل سداسي $\%i_s$ يصيح بعد سنة $(1 + i_s)^2$

المعدلان i_a و i_s يسميان متكافئان، إن كانت قيمتيهما المكتسبة (الجملة) متساويتان، بمعنى:

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2$$

إذا كانت المدة عدد كسري، لتوسيع القانون العام للفوائد المركبة، يمكن استعمال قانون المعدلات المتكافئة

$$n = k + \frac{p}{q}$$

$$A_k = A(1+i_a)^k$$

للجزء q من السنة 1 دج، يصبح $(1+i_q)$ ولـ p أجزاء يصبح $(1+iq)^p$، ومنه فإن:

$$A_{k+\frac{p}{q}} = a\,(1+i_a)^k\,(1+i_q)^p$$

وبما أن: $1+i_q = (1+i_a)^k$

وبالتالي يكون لدينا:

$$A_{k+\frac{p}{q}} = A\,(1+i_a)^k\,(1+i_q)^{p/q}$$

ومن ثم فإن:

$$A_{k+\frac{p}{q}} = A\,(1+i)^n$$

وعليه فالقانون العام للفوائد المركبة يطبق إذن االمعادلة التي تكون فيها الزمن (المدة) عدد كسري.

مثال:

باستعمال الحل التجاري، احسب الجملة لمبلغ من المال قدره 10000 دج أودع بالنك لمدة 8 سنوات و5 أشهر، إذا علمت وأن البنك يحتسب معدل فائدة 6% ؟

الحل:

بما أن:

$$A_{k+\frac{p}{q}} = A\,(1+i)^n = A\,(1+i_a)^k\,(1+i_q)^{p/q}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A_n = A_8}^{\mathbf{5/12}} = 10000\,(1.06)^8\,(1.06)^{5/12}$$

وحيث أن:

$$(1.06)^8 = 1.593848$$

$$(1.06)^{5/12} = 1.024576$$

$$A_n = 10000 \text{ x } 1.593848 \text{ x } 1.024576$$

$$= 16330.18 \text{ da}$$

المقارنة بين المعدل المتكافئ والمعدل المتناسب:

لنحسب المعدلات المتكافئة والمتناسبة للمعدل 6%، 8%

t = %6	Taux proportionnels معدل متناسب	Taux Equivalents معدل متكافئ
T. semestriel	$\frac{0.06}{2} = 0.03$	$(1+i_s)^2 = 1.06 \Rightarrow i_s = (1.06)^{1/2} - 1 = 0.029563$
T. trimestriels	$\frac{0.06}{4} = 0$	$(1+i_t)^4 = 1.06 \Rightarrow i_t = (1.06)^{1/4} - 1 = 0.014674$
T. mensuels	$\frac{0.06}{12} = 0.03$	$(1+i_m)^{12} = 1.06 \Rightarrow i_m = (1.06)^{1/12} - 1 = 0.004868$

بنفس الكيفية يمكن ايجاد المعدل المتكافئ والمتناسب
للمعدل **t = %8**

الدرس الثالث:

الحسم بفوائد مركبة

Escompte à Intérêt composé

تعريف القيمة الحالية:

القيمة الحالية لمبلغ معين، تعني قيمة هذا المبلغ المتوقع الحصول عليه اليوم.

القانون الأساسي للقيمة الحالية:

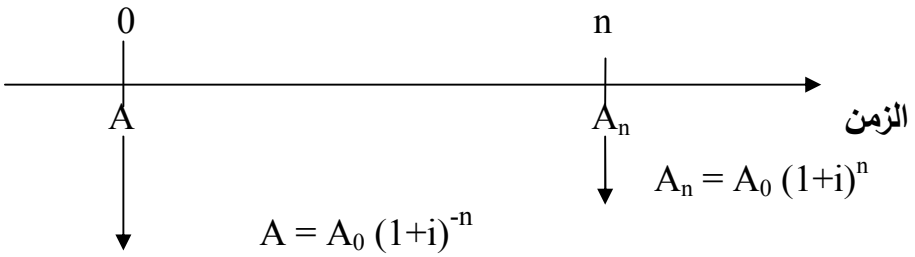
إن قانون الحسم ينتج عن قانون الاستثمار، حيث أنه وبناءا على ما ورد معنا في الفصل السابق أين كونا القانون على النحو التالي:

$$\mathbf{A_n = A_0\,(1+i)^n}$$

بتقسيم طرفي المعادلة على $(1+i)^n$ نحصل على:

$$\mathbf{A = A_0\,(1+i)^{-n}}$$

إن القيمة $\mathbf{(1+i)^{-n}}$ تسمى معامل الخصم



مثال1:

ما هي القيمة الحالية لمبلغ 6000 دج قابلة للدفع بعد 5 سنوات، إذا كان معدل الحسم الذي يعتمده البنك هو 3%.

الحل:

$$\mathbf{A = A_0\,(1+i)^{-n}}$$

$$\mathbf{A} = 6000\ (1.03)^{-5}$$

$$(1.03)^{-5} = 0.862609$$

$$A = 5175.654\ da$$

تقويم أو تقدير رأسمال قابل للسداد في مدة ما:

ليكن الرأسمال (A) القابل للسداد في المدة صفر

- ما هي قيمة A_n في المدة n ؟
- ما هي قيمة A_p في المدة p ؟

الدرس الرابع:

حسم الديون بفائدة مركبة

مصطلحات لا بد من معرفتها:

القيمة الاسمية للدين (Valeur Nominal): ويقصد بها جملة مبلغ مستثمر في نهاية فترة الاستثمار.

القيمة الحالية للدين (Valeur Actuelle): وهي قيمة مبلغ مستثمر لمدة معينة وبمعدل معين.

الخصم (الحطيطة) (Escompte): تعرف بأنها فائدة مبلغ مستثمر بمعدل معين لفترة زمنية محددة.

يمكن توضيح موقع هذه المصطلحات والعلاقات فيما بينها على النحو التالي في الشكل الموالي:

قانون الحسم:

لتكن:

$\mathbf{A_0}$: القيمة الحالية

$\mathbf{A_n}$: القيمة الاسمية

E : الحطيطة (الخصم)

وحيث أن:

القيمة الحالية = القيمة الاسمية – الحطيطة

$$A_0 = A_n - E$$

فإن:

$$\mathbf{E = A_n - A_0}$$

$$\because \quad A_0 = A_n\,(1+i)^{-n}$$

بالتعويض نجد:

$$E = A_n - A_n\,(1+i)^{-n}$$

وبالتالي يمكن التعبير عن قانون الحطيطة كالتالي:

$$E = A_n\left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$

مثال:

شخص مدين بمبلغ 150000 دج، تستحق السداد بعد 15 سنة من الآن وبفائدة مركبة بمعدل 5%

المطلوب: حساب الحطيطة ثم إيجاد القيمة الحالية ؟

الحل:

لدينا:

$$\because \quad E = A_n \left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$

$$\therefore \quad E = 150000 \left[1 - (1.05)^{-15}\right]$$

$$= 150000 \left(1 - 0.481017\right)$$

$$= 150000 \times 0.518983$$

$$= 77847.45 \text{ da}$$

حساب القيمة الحالية:

لدينا بالتعريف:

$$\mathbf{A_0 = A_n - E}$$

$$A_0 = 150000 - 77847.45$$

$$= 72152.55 \text{ da}$$

استعمال القانون العام للفوائد المركبة:

يمكننا حساب على التوالي:

- القيمة المكتسبة (الجملة)
- القيمة الحالية
- المعدل
- الزمن (المدة)

حساب الجملة:

إيجاد الجملة سهل، متى توفر المعدل والزمن (المدة) في الجدول المالي الأول،

حيث: $A_n = A_0 (1+i)^n$

لا يوجد الزمن (المدة) في الجدول:

مثال:

أوجد جملة مبلغ من المال قدره 100000 دج اودع في بنك لمدة 5 سنوات و6 شهور، علما وأن هذا البنك يحتسب فوائد مركبة بمعدل 8% سنويا.

الحل:

الحل بواسطة الجداول المالية

يرتكز الاستكمال الخطي بعد تحديد نقطتي الاحداثيات

$n = 5$ $\qquad\qquad$ $n = 6$

لدينا:

من الجدول المالي الأول نجد:

$$(1.08)^6 = 1.586874$$
$$(1.08)^5 = 1.469328$$

(الفرق الجدولي) $\Delta = 0.117546$

$$1.08^{5\ 6/12} = 1.08^5 + \frac{1}{2}\Delta$$
$$= 1.469328 + (0.5 \times 0.117546)$$
$$= 1.528101$$

ومنه فإن:

$$A_5{}^{6/12} = 100000 \times 1.528101$$
$$= 152810.1 \text{ da}$$

الحل بالطرقة التجارية:

وفق هذه الطريقة لدينا:

$$A_n = A_0 (1+i)^n (1+i)^{p/q}$$
$$\Rightarrow A_n = 100000 (1.08)^5 (1.08)^{1/2}$$

وحيث أن:

$(TF_1) \Rightarrow (1.08)^5 = 1.469328$

$(TF_6) \Rightarrow (1.08)^{6/12} = 1.039230$

$\therefore A_5{}^{6/12} = 100000 \times 1.469328 \times 1.039230$

$= 100000 \times 1.0879698$

الدرس الخامس: تابع للدرس السابق

لا يوجد المعدل في الجدول:

مثال:

أودع شخص مبلغ 50000 دج في إحدى المؤسسات المالية وبفائدة مركبة، بمعدل 2.8% للسداسي وذلك لمدة 10 سنوات.

المطلوب: إيجاد جملة ما له لدى تلك المؤسسة بنهاية المدة ؟

الحل:

الحل بواسطة الجداول المالية

بما أن معدل الفائدة سنويا غير موجود بالجدول المالي ويقع بين المعدلين 2.5% و3%، فإننا نستخرج قيمته بطريقة التناسب كما يلي:

من الجدول المالي الأول نجد:

$$(1.03)^{20} = 1.586874$$
$$(1.025)^{20} = 1.469328$$

$$\Delta = 0.117546 \quad \text{(الفرق الجدولي)}$$

$$1.028^{20} = 1.025^{20} + \frac{3}{5}\Delta$$

لا يوجد المعدل والزمن في الجدول:

مثال:

كم سيصبح رأسمال قدره 250000 دج وظف لمدة 10 سنوات و8 أشهر بمعدل 5.8% سنويا ؟

لدينا: $\mathbf{A_0} = 250000\ da, \quad \mathbf{t} = \%5.8, \quad \mathbf{n} = 10^{\,8/12} \quad \mathbf{A_n} = \mathbf{A_{10}}^{\mathbf{8/12}}$

استكمال جمع المعدل متبوع باستكمال على الزمن

من الجدول المالي نجد:

$$(TF_1) \Rightarrow \quad (1.06)^{11} = 1.898299$$
$$(1.0575)^{11} = 1.849627$$

$$\Delta = 0.048672 \quad \text{(الفرق الجدولي)}$$

$$\therefore \quad 1.058^{11} = 1.0575^{11} + \frac{1}{5}\Delta$$
$$= 1.849627 + \frac{0.048672}{5}$$
$$= 1.8593614$$

ودائما من نفس الجدول نجد:

$$(TF_1) \Rightarrow \quad (1.06)^{10} = 1.790848$$
$$(1.0575)^{10} = 1.749056$$

$$\Delta = \text{(الفرق الجدولي)} \quad 0.041792$$

$$\therefore \quad 1.058^{10} = 1.0575^{10} + \frac{1}{5}\Delta$$
$$= 0.749056 + \frac{0.041792}{5}$$
$$= 1.7574144$$

ومنه فإن:

$$1.058^{11} = 1.8593614$$
$$1.058^{10} = 1.7574144$$

$$\Delta = \text{(الفرق الجدولي)} \quad 0.1019470$$

$$\therefore \quad \mathbf{(1.058)^{10+8/12}} = 1.058^{10} + \frac{2}{3}\Delta$$
$$= 1.7574144 + \frac{2}{3}\,0.1019470$$
$$= 1.825379$$

حساب القيمة الحالية:

لدينا بالتعريف كما سبق وأن رأينا:

القيمة الحالية: $\mathbf{A_0 = A_n\,(1+i)^{-n}}$

لا يوجد الزمن (المدة) في الجدول:

مثال:

شخص مدين بمبلغ 95000 دج تستحق الدفع بعد 8 سنوات و9 أشهر من الآن وبفائدة مركبة بمعدل 7%سنويا.

المطلوب:

- أوجد القيمة الحالية لذلك الدين الآن ؟

الحل:

- استعمال الجداول المالية

بالرجوع لمعطيات المثال السابق والمتمثلة في:

بما أن الزمن غير موجود بالجدول المالي ويقع بين الزمنين أو المدتين 8 سنوات و9 سنوات، فإننا نستخرج قيمته بطريقة التناسب كما يلي:

بالاعتماد على الجدول المالي الثاني نجد:

$$(1.07)^{-8} = 0.582009$$
$$(1.07)^{-9} = 0.543934$$

(الفرق الجدولي) $\Delta = 0.038075$

ومنه فإن:

$$(1.07)^{-8\ 9/12} = 0.582009 - \frac{3}{4}\Delta$$

$$= 0.582009 - \frac{3\ x\ 0.038075}{4}$$

$$= 0.5534528$$

$$\therefore \quad \mathbf{A_0} = 95000 \text{ x } 0.5534528$$

$$= 52578.016 \text{ da}$$

الدرس السادس: تابع

لا يوجد المعدل في الجدول:

مثال:

شخص مدين بمبلغ 20000 دج، تستحق السداد بعد 6 سنوات من الآن وبفائدة مركبة بمعدل 5.8%.

المطلوب

- أوجد القيمة الحالية لذلك الدين الآن ؟
-

الحل:

$$\therefore \quad \mathbf{A_0} = 20000\ (1.058)^{-6}$$

وبما أن معدل الفائدة سنويا غير موجود بالجدول المالي ويقع بين المعدلين 5.5% و6%، فإننا نستخرج قيمته بطريقة التناسب كما يلي:

من الجدول المالي نجد:

$$(1.055)^{-6} = 0.725246$$
$$(1.06)^{-6} = 0.704961$$

$$\Delta = 0.020285 \quad \text{(الفرق الجدولي)}$$

$$\therefore \quad 1.058^{-6} = 1.055^{-6} - \frac{3}{5}\Delta$$
$$= 0.725246 - \frac{2}{5}\,0.020285$$
$$= 0.717132$$

ومنه فإن:

$$\mathbf{A_0} = 20000 \times 0.717132$$
$$= 14342.64 \text{ da}$$

حساب المعدل:

مثال:

ما هو المعدل الذي يصبح به مبلغ يساوي أربع مرات المبلغ الأصلي، بعد استثماره لمدة 25 سنة ؟

الحل:

بالإمكان الحصول على المعدل بإحدى الطريقتين، إما بقانون الاستثمار أو بقانون الحسم أو القيمة الحالية، حيث:

- استعمال الجداول المالية

تطبيق قانون الاستثمار

$$(1+i)^{25} = 4$$

$(1.0575)^{25} = 4.045846$
$(1.055)^{25} = 3.813392$
(الفرق الجدولي) $\Delta = 0.232454$

$(1+ i)^{25} = 4.000000$
$(1.055)^{25} = 3.813392$
$\delta = 0.186608$

إذا المعدل المطلوب هو:

$$t = 5.5\% + 0.25\% \frac{186608}{232454}$$

$$= \%5.7006$$

تطبيق قانون الحسم:

$$(1+i)^{-25} = 0.25$$

$(1.055)^{-25} = 0.262234$
$(1.06)^{-25} = 0.322999$
(الفرق الجدولي) $\Delta = 0.029235$

$(TF_2) \Rightarrow (1.055)^{-25} = 0.262234$
$(1+i)^{-25} = 0.250000$
$\delta = 0.012234$

المعدل المطلوب هو:

$$t = 5.5\% + 0.5\% \frac{12234}{29235}$$

$$= \%5.709$$

حساب الزمن:

مثال:

ما هو الزمن الذي يتضاعف فيه مبلغ مالي بمعدل سداسي 5% باستثمارات سداسية ؟

الحل:

- استعمال الجداول المالية

أ. تطبيق قانون الاستثمار

$$(1.04)^{n} = 2$$

$(1.04)^{18} = 2.025817$
$(1.04)^{17} = 1.947900$
(الفرق الجدولي) $\Delta = 0.077917$

$(1.04)^{n} = 2.000000$
$(1.04)^{17} = 1.947900$
$\delta = 0.052100$

إذا الزمن المطلوب هو:

$$n = 17 + \frac{52100}{77917}$$

$$= 17 \text{ semestres et } \frac{2}{3}$$

ب. تطبيق قانون الحسم:

$$(1.04)^{-n} = 0.5$$

$(1.04)^{-17} = 0.513373$
$(1.04)^{-18} = 0.493628$
(الفرق الجدولي) $\Delta = 0.019745$

$(1.04)^{-17} = 0.513373$
$(1.04)^{-n} = 0.500000$
$\delta = 0.013373$

إذا الزمن المطلوب هو:

$$n = 17 + \frac{13373}{19745}$$

$$= 17 \text{ semestres et } \frac{2}{3}$$

الدرس السابع:

التكافؤ بفوائد مركبة
Equivalence à Intérêt Composé

تعريف:

المقصود بتسوية الديون هو استبدال عدة ديون تستحق في تواريخ مختلفة بدين أو ديون أخرى ذات تواريخ تتناسب مع المركز المالي للمدين أي مع حالته المالية.

وجدير

سبق لنا دراسة التكافؤ في موضوع الحسم بفائدة بسيطة واستعماله في تسوية وتعديل الديون في الأوراق التجارية، وينطبق هنا ما سبق التطرق له.

- استبدال دين قديم طويل الأجل بدين جديد قصير الأجل.
- استبدال عدة ديون قديمة بدين واحد جديد.

إذا ما تم حسم ورقتين تجاريتين في تاريخ معين على أساس حسم حقيقي مركب وكانت القيمة الاسمية لكل منها A_{n1}, A_{n2} والقيمة الحالية A_1, A_2 لكل منهما ومدة حسم كل منها n_1, n_2 بمعدل مركب i، فتكون القيمة الحالية لكا منها كما يلي:

$$A_1 = A_{n1}\,(1+i)^{-n1} \qquad \text{و} \qquad A_2 = A_{n2}\,(1+i)^{-n2}$$

فإذا كانت $A_1 = A_2$ في تاريخ معين هو تاريخ التكافؤ فإن:

$$A_{n1}\,(1+i)^{-n1} = A_{n2}\,(1+i)^{-n2}$$

وبالتالي فإن رأسمالين لكن متكافئان، بفوائد مركبة في وقت معين؛ إذا كانت قيمتيهما الحاليتين في هذا التاريخ متساويتين بنفس المعدل.

ونفس الشيء بالنسبة لمجموعتين من رؤوس أموال متكافئتين بفوائد مركبة في وقت معين؛ إذا كان مجموع القيم الحالية للمجموعة الأولى تساوي مجموع القيم الحالية للمجموعة الثانية.

على هذا الأساس فإن قاعدة التكافؤ تأخذ الشكل التالي:

القيمة الحالية للديون القديمة = القيمة الحالية للديون الجديدة

استبدال دين قديم طويل الأجل بدين جديد قصير الأجل:

في مثل هذه الحالة فإن المعادلة التي تترجم التكافؤ تكون على النحو الآتي:

$$A_{n1}\,(1+i_1)^{-n1} = A_{n2}\,(1+i_2)^{-n2}$$

مثال:

شخص مدين بسفتجة قيمتها الاسمية 175000 دج، تستحق الدفع بعد 3 سنوات، اتفق مع دائنه على استبدالها بورقة جديدة تستحق بعد 5 سنوات.

المطلوب:

احسب القيمة الاسمية للورقة الجديدة، إذا علمت وأن الاستبدال تم بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا ؟

الحل:

طريقة أولى في الحل:

بما أن شرط التكافؤ

$$A_{n1}\,(1+i_1)^{-n1} = A_{n2}\,(1+i_2)^{-n2}$$
$$175000\,(1.06)^{-3} = \mathbf{A_{n2}}\,(1.06)^{-5}$$
$$\therefore\ 175000 \text{ x } 0.839619 = A_{n2\,X}\,0.747258$$

ومنه فإن:

$$A_{n2} = \frac{175000\ x\ 0.839619}{0.747258}$$

$$= 196629.979 \text{ da}$$

استبدال عدة ديون قديمة بدين واحد جديد:

شرط التكافؤ في هذه الحالة

$$A_n\,(1+i)^{-n} = A_{n1}\,(1+i)^{-n1} + A_{n2}\,(1+i)^{-n2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n\,(1+i)^{-n}$$

مثال 1:

تاجر مدين بالأوراق التجارية التالية:

- سفتجة قيمتها الاسمية 35000 دج، تستحق الدفع بعد 3 سنوات.
- سفتجة قيمتها الاسمية 65000 دج، تستحق الدفع بعد 5 سنوات.

اتفق مع دائنه على تعويض هذه السفتجات، بتحرير سفتجة جديدة واحدة، تستحق السداد بعد 6 سنوات من الآن.

المطلوب:

حساب القيمة الاسمية للسفتجة الجديدة، إذا علمت وأن التسوية تمت بمعدل فائدة مركبة 8% ؟

الحل:

بما أن التكافؤ هو من الشكل: $A_n (1+i_1)^{-n} = A_{n1} (1+i_2)^{-n1} + A_{n2} (1+i_2)^{-n2}$

فإن:

$$\mathbf{A_n} (1.08)^{-6} = 35000 (1.08)^{-3} + 65000 (1.08)^{-5}$$

$$\therefore \quad 0.630170\ A_n = 350000 \text{ x } 0.793832 + 65000 \text{ x } 0.680583$$

$$A_n = \frac{(35000 \text{ x } 0.793832 + 65000 \text{ x } 0.680583)}{0.630170}$$

$$= 114289.819 \text{ da}$$

مثال 2:

شخص مدين بالديون التالي:

- سفتجة قيمتها الاسمية 250000 دج، تستحق السداد بعد 4 سنوات.
- سفتجة قيمتها الاسمية 3000000 دج، تستحق السداد بعد 6 سنوات.

اتفق مع الدائن على تعويض هذين السفتجتين بسفتجة جديدة تستحق السداد بعد 9 سنوات من الآن، فإذا علمت أن معدل الفائدة للديون القديمة هو5% ،ومعدل الفائدة المركبة للدين الجديد 7%.

المطلوب:

- حساب القيمة الاسمية للسفتجة الجديدة ؟