Université 8 Mai 1945-Guelma **Année universitaire 2023/2024**

Faculté des MISM **Département d'informatique**

Niveau ingénieur **2-ème année**

Examen de 1^{er} semestre: Probabilités et Statistique 2

Durée 2 H

Exercice 1 (**9 pts**)

N.B: Les deux parties **I** et **II** Sont indépendantes.

I. On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X la v.a. représentant le nombre de faces obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X, calculer son espérance et sa variance.

2. Soit la v.a.$Y = X^2 - 1$. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. Y et donner sa fonction de répartition.

II. Soient X et Y deux variables aléatoires liées par la relation $Y = 2 - 3X$. Les caractéristiques numériques de la variable aléatoire X sont données:

$\mathbb{E}(X) = -1$, $Var(X) = 4$. Déterminer:

a) L'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y.

b) X et Y sont elles indépendantes? justifier votre réponse.

Exercice 2 (**5 pts**)

Un livre de 800 pages contient 1200 erreurs d'impression, réparties au hasard. On désigne par X "la variable aléatoire qui compte le nombre d'erreurs dans une page donnée".

1. Quelle est la loi exacte de X.

2. Peut-on approximer la loi exacte de X, par une autre loi discrète. Justifier.

3. Calculer alors les probabilité, que dans cette page:

(a) il n'y ait **aucune** erreur,

(b) il y ait **au moins** 3 erreurs.

Exercice 3 (**6 pts**)

La durée de vie en années d'un ordinateur est une **v.a**. notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ positif ($X \rightarrow \exp(\lambda)$), sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ.

2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné **huit** années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à **10 ans**.

Corrigé type de l'examen

Exercice 1

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X :
$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.
$X(\Omega) = D_X = \{0, 1, 2, 3\}$.
La loi de probabilité de la v.a. X:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calculons $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in D_X} xP(X = x) = 0 \times \left(\frac{1}{8}\right) + 1 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \simeq 1,50.$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X), \text{ tel que } \mathbb{E}^2(X) = \sum_{x \in D_X} x^2 P(X = x) = 0^2 \times \left(\frac{1}{8}\right) + 1^2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 2^2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + \\ &= \frac{24}{8} = 3, \text{ on en déduit que } Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

2. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = X^2 - 1$et donner sa fonction de répartition:

y_i	-1	0	3	8
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

II.

Soient deux variables aléatoires X et Y liées par la relation $Y = 2 - 3X$.

a. $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2 - 3X) = 2 - \mathbb{E}(3X) = 2 - 3\mathbb{E}(X) = 5$, $Var(Y) = Var(2 - 3X) = (-3)^2 Var(X) = 36$.

b.Or $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X(2-3X)) = 2\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(X) = -2+3 = 1 \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = -1 \times 5 = -5$. On en déduit que les deux variables ne sont pas indépendantes, puisque X et Y sont liées par une relation linéaire.

Exercice 2

1. X : "le nombre d'erreurs dans une page donnée". Il est clair que le support de X est $D_X = \{0, 1, ..., 1200\}$ et P (un erreur quelconque se trouve à la page donnée) $= \dfrac{1}{800}$, don la loi suit par X est la **loi Binomiale** de paramètres $n = 1200$, $P = \dfrac{1}{800}$ et on écrit $X \to B\left(1200, \dfrac{1}{800}\right)$

2. Puisque $n = 1200 \geq 50$ et $np = \dfrac{1200}{800} = 1,5 \leq 5$, donc alors on peut approximer la loi de la v.a.r X par la loi de **Poison** de paramètre $\lambda = nP = 1200$ $\dfrac{1}{800} = 1,5$.

3.

a)

$$P(X=0) = \exp(-1,5)\frac{(1,5)^0}{0!} = \exp(-1,5)$$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\ &= 1 - \left[\exp(-1,5)\frac{(1,5)^0}{0!} + \exp(-1,5)\frac{(1,5)^1}{1!} + \exp(-1,5)\frac{(1,5)^2}{2!}\right] \\ &= 1 - \exp(-1,5)[1 + 1,5 + 1,125] \simeq 0,19 \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, déterminons la valeur de λ:

$$\begin{aligned} P(X &> 10) = 0,286 \Rightarrow 1 - P(X \leq 10) = 0,286 \\ &\Rightarrow 1 - F_X(10) = 1 - \left(1 - e^{-10\lambda}\right) = 0,286 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\ln(0,286)}{-10} = 0,125. \end{aligned}$$

2. Calculons la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à **5 mois** :

$$P(X < 5) = F_X(5) = 1 - e^{-5(0,125)}.$$

3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné **huit années**, calculons la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à **10 ans**:

$$\begin{aligned} P(X &> 10/X > 8) = \frac{P(X > 10; X > 8)}{P(X > 8)} \\ &= \frac{P(X > 10)}{P(X > 8)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq 10)}{1 - P(X \leq 8)} \\ &= \frac{1 - F_X(10)}{1 - F_X(8)} \\ &= 0,779. \end{aligned}$$