

EXERCICE 1. (5 points)

- (1) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $a = (a_1, a_2, a_3)$ une constante dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer le gradient de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dans les cas suivants
- 1.1:** $f(x) = x.a$, $f(x) = (x.a)^2$, où $\cdot$ est le symbole du produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$
- 1.2:** $f(x) = \|x \times x\|^2$, où $\times$ est le symbole du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
- (2) On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = b$, (E)
où b est un réel.
- 2.1:** Soit $h(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Montrer que $\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{b}{2}$.
- 2.2:** Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de h .
- 2.3:** En déduire les solutions de l'équation initiale (E).

EXERCICE 2. (10 points)

- (A):** Soit la fonction $f(x, y) = y^3 \cos(x) + y + x - 2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (1) Résoudre l'équation $f(0, y) = 0$.
- (2) Montrer que $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(0, 1)$ ($\varphi : x \mapsto y(x)$).
- (3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f en $(0, 1)$.
- (4) Trouver $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$. Ind : $\varphi''(x) = \left(-\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}\right)'$
- (5) Former le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$.
- (B):** Soit la fonction

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

e_1 : Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

e_2 : g est-elle continue en $(0, 0)$?

e_3 : Soit $(a, b) \neq (0, 0)$. On note $g_{(a,b)}(t) = \frac{g(ta, tb) - g(0, 0)}{t}$. Calculer $\lim_{t \rightarrow 0} g_{(a,b)}(t)$.

e_4 : Que peut-on déduire si $(a, b) = (1, 0)$ où $(a, b) = (0, 1)$?

EXERCICE 3. (5 points) Soit les paraboles d'équations

$$x = f(y) = \frac{1}{4}y^2 + 1, \quad y = g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3.$$

Vérifier que le point $(2, 2)$ est le seul point d'intersection des deux paraboles.

Soit : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } -2 \leq x \leq f(y) \text{ et } -2 \leq y \leq g(x)\}$.

- (1) Dessiner le domaine D . Représenter sur le même dessin les parties D_1 et D_2 telles que

$$D_1 = \{(x, y) \in D \text{ et } y \geq 2\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in D \text{ et } y \leq 2\}.$$

- (2) Calculer

$$I_{D_1} = \int \int_{D_1} (x - y) dx dy, \quad I_{D_2} = \int \int_{D_2} (x - y) dx dy.$$

- (3) Déduire $I_D = \int \int_D (x - y) dx dy$.

Hint : EXERCICE 1. $x \times a = (x_2 a_3 - x_3 a_2, x_3 a_1 - x_1 a_3, x_1 a_2 - x_2 a_1)$,
 $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.