المحور الخامس: التوزيعات الاحتمالية

تمهيد: هناك العديد من التوزيعات (القوانين) الاحتمالية منها ما هو منفصل وآخر متصل، وسنركز في هذا المحور على ثلاثة توزيعات فقط، توزيع برنولي وثنائي الحد (منفصلين) والتوزيع الطبيعي (متصل).

1. توزيع (قانون) بارنولي:

يتعين قانون أو توزيع بارنولي BERNOULLI من خلال تجربة أحادية المحاولة والتي تحتمل نتيجتين متنافيتين A و$\overline{A}$ نسمي A نجاح ونسمي $\overline{A}$ فشل. ويمثل P احتمال وقوع الحدث الأولي A(احتمال النجاح) وبالتالي $1-P$ هو احتمال وقوع الحدث $\overline{A}$ (احتمال الفشل)، ويرمز لقانون بارنولي كما يلي:

$$X \leadsto B(1;P)$$

وإذا اعتبرنا المتغير العشوائي X يأخذ القيمة 1 عند وقوع حدث النجاح والقيمة 0 عند وقوع حدث الفشل يصبح لدينا:

$$P(X)=\begin{cases} P & ,x=1 \\ 1-P & ,x=0 \end{cases}$$

ويصبح قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي في هذه الحالة كما يلي:

X	0	1	Σ
$P(X)$	$1-P$	P	1

المميزات العددية لتوزيع برنولي:

التوقع الرياضي: لدينا:

$$E(X)=\Sigma XP(X)=0\times(1-P)+1(P)=P$$
$$E(X)=P$$

التباين: لدينا:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=[0^2\times(1-P)+1^2(P)]-P^2=P-P^2=P(1-P)$$
$$V(X)=P(1-P)$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{P(1-P)}$$

2. توزيع ثنائي الحد:

في كثير من التجارب تكون النتيجة فيها أحد من أمرين إما نجاح أو فشل، وتتكون هذه التجارب من تكرار واعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض، فمثلا عند رمي زهرة النرد فان النتيجة تكون إما رقما زوجيا أو فرديا وتكون نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي محاولة أخرى، إن مثل هذه التجربة تسمى تجربة ذات الحدين.

وقانون ثنائي الحد ينطبق على كل تجربة احتمالية تتحقق فيها الشروط التالية:

- نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل؛
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى؛
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وليكن P وبالتالي فاحتمال الفشل هو $1-P$؛
- التجربة تتكرر عدد معين من المرات أي يكون هناك n من المحاولات (إذا كان $n=1$ فالتجربة تسمى تجربة برنولي).

بتحقق كل الشروط السابقة يمكن القول أن المتغير العشوائي المتقطع X يتبع قانون ثنائي الحد:

$$X \leadsto B(n;P)$$

وقانون ثنائي الحد يكتب على الشكل التالي:

$$P(X=k)=C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

حيث: n عدد مرات تكرار التجربة، k عدد مرات النجاح، P احتمال النجاح، $1-P$ احتمال الفشل للحدث الأولي.

مثال 1: يقوم رجل أعمال بالاستثمار في ثلاثة مشاريع تجارية في مناطق مختلفة (Pr1, Pr2, Pr3) حيث أن احتمال نجاح كل مشروع بعد مدة زمنية هو 0,9. ليكن X متغير عشوائي يُمثل عدد المشروعات الاستثمارية الناجحة. حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

الحل: الملاحظ في هذا المثال هو تحقق شروط تطبيق قانون ثنائي الحد بالنسبة للحدث الأولي:

- نتيجة كل مشروع هو نجاح أو فشل؛
- نتيجة مشروع مستقلة عن نتيجة المشاريع الأخرى؛
- نفس احتمال النجاح بالنسبة للمشاريع الثلاثة، أي نسبة النجاح ثابتة $P=0{,}9$ واحتمال الفشل هو $1-P=0{,}1$
- عدد المحاولات هو عدد مرات اجراء السحب $n=3$.

ومنه X يتبع قانون ثنائي الحد: $X \rightsquigarrow B(3;\frac{5}{8})$

$$P(X=k)=C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

$$P(X=0)=C_3^0 P^0 (1-P)^3=(0{,}9)^0(0{,}1)^3=0{,}001$$

$$P(X=1)=C_3^1 P^1 (1-P)^2=3(0{,}9)^1(0{,}1)^2=0{,}027$$

$$P(X=2)=C_3^2 P^2 (1-P)^1=3(0{,}9)^2(0{,}1)^1=0{,}243$$

$$P(X=3)=C_3^3 P^3 (1-P)^0=(0{,}9)^3(0{,}1)^0=0{,}729$$

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	0,001	0,027	0,243	0,729	1

3. التوزيع الطبيعي: إن التوزيع الطبيعي هو أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في التحليل الاحصائي، فكثير من التوزيعات الموجودة فعلا في الطبيعة وفي الصناعة وفي السوق تتبع التوزيع الطبيعي، وأمثلة ذلك مقاييس الأوزان ومقاييس الذكاء، أطوال عدد كبير من الناس.

نقول عن متغير عشوائي مستمر أنه يتبع التوزيع الطبيعي $N(m,\sigma_x)$ إذا كانت دالة كثافته تأخذ الشكل التالي:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\times e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_x}\right)^2\right]}$$

حيث: $m=E(X)$ متوسط التوزيع وσ_x الانحراف المعياري، $\pi=3{,}14$، $e=2{,}178$

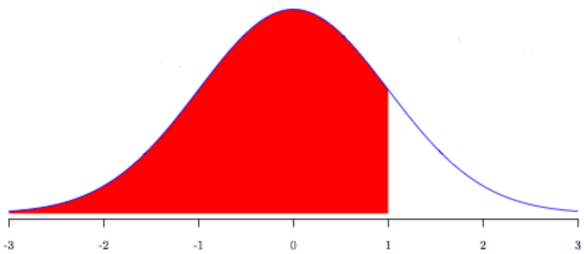
- **التوزيع الطبيعي القياسي**: هو توزيع طبيعي من خصائصه $m=0$ و $\sigma_x=1$ ويرمز له بالرمز $N(0,1)$، ويمكن تحويل أي توزيع طبيعي $N(m,\sigma_x)$ إلى توزيع طبيعي قياسي بتحويل المتغير العشوائي X إلى المتغير العشوائي القياسي Z حيث:

$$Z=\frac{X-m}{\sigma_x}\quad ;\quad Z \rightsquigarrow N(0,1)$$

ودالة كثافة التوزيع الطبيعي القياسي تأخذ الشكل التالي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}$$

ومن بين خصائص التوزيع الطبيعي القياسي من أجل الجدول $P(Z \leq t) = Q(t)$، أي أن حساب الاحتمال مرتبط بحساب المساحة المظللة والمحصورة بين محور الفواصل والمنحنى الممثلة لدالة التوزيع الاحتمالي كما في الشكل التالي:



الخاصية الأولى: جدول التوزيع الطبيعي القياسي يعطي القيم $Q(t)$ مباشرة من أجل t موجب، مثلا:

$$P(Z \leq 0{,}52) = Q(0{,}52) = 0{,}6985$$
$$P(Z \leq 1{,}51) = Q(1{,}51) = 0{,}9344$$

الخاصية الثانية: من أجل t سالب فإن:

$$P(Z \leq -t) = Q(-t) = 1 - Q(+t)$$

مثال 3: أحسب $P(Z \leq -1{,}56)$

الحل: $P(Z \leq -1{,}56) = Q(-1{,}56) = 1 - Q(1{,}56) = 1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$

الخاصية الثالثة: $P(Z \geq t) = 1 - P(Z \leq t) = 1 - Q(t)$

مثال 4: أحسب $P(Z \geq 0{,}19)$، $P(Z \geq -1{,}34)$

الحل:

1. $P(Z \geq 0{,}19) = 1 - P(Z \leq 0{,}19) = 1 - Q(0{,}19) = 1 - 0{,}5753 = 0{,}4247$
2. $P(Z \geq -1{,}34) = 1 - P(Z \leq -1{,}34) = 1 - Q(-1{,}34) = 1 - [1 - Q(1{,}34)] = Q(1{,}34) = 0{,}9099$

الخاصية الرابعة: $P(t_1 \leq Z \leq t_2) = Q(t_2) - Q(t_1)$

مثال 5: أحسب كل من:

$$P(0{,}25 \leq Z \leq 1{,}13)$$
$$P(-0{,}14 \leq Z \leq 2{,}11)$$
$$P(-0{,}23 \leq Z \leq -0{,}17)$$

الحل:

1. $P(0{,}25 \leq Z \leq 1{,}13) = Q(1{,}13) - Q(0{,}25) = 0{,}8708 - 0{,}5987 = 0{,}2721$
2. $P(-0{,}14 \leq Z \leq 2{,}11) = Q(2{,}11) - Q(-0{,}14) = Q(2{,}11) - [1 - Q(0{,}14)] = Q(2{,}11) - 1 + Q(0{,}14) = 0{,}9826 - 1 + 0{,}5557 = 0{,}5383$
3. $P(-0{,}23 \leq Z \leq -0{,}17) = Q(-0{,}17) - Q(-0{,}23) = [1 - Q(0{,}17)] - [1 - Q(0{,}23)] = Q(0{,}23) - Q(0{,}17) = 0{,}5910 - 0{,}5675 = 0{,}0235$

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000